Master 1
Mention mathématique et informatique
UFR de Mathématiques
Université Paris-Diderot

Parcours mathématiques fondamentales
Parcours modélisation aléatoire
Parcours logique mathématique et fondements de l'informatique

Année 2012-2013

Secrétariat du Master 1
Christian Sénécal
Bâtiment Sophie Germain
tél : (33) (0)1 57 27 65 37/40
Fax : (33) (0)1 57 27 65 41
http ://www.math.univ-paris-diderot.fr/formations/masters/math/index

Responsables pédagogiques

- parcours Mathématiques fondamentales et parcours logique mathématique et fondements de l'informatique :

  Loïc Merel

  merel@math.jussieu.fr
- parcours modélisation aléatoire :

  Dominique Picard :

  picard@math.jussieu.fr

Responsable de la scolarité, bureau d'accueil des étudiants

Christian Sénécal
Bâtiment Sophie Germain
tél : (33) (0)1 57 27 65 37

Horaires d'ouverture

- Lundi et jeudi : 9h-12h et 13h30 :17h
- Mardi et vendredi : 9h-16h
- Mercredi : 9h-12h

Conditions d'accès

L'accès en MASTER 1ère année est ouvert

- aux étudiant(e)s d'une université ou d'une école française, titulaires d'un diplôme de niveau Licence à dominante mathématique,
- aux étudiant(e)s d'une université étrangère, titulaires d'un diplôme équivalent.
- aux étudiant(e)s ayant obtenu une dispense de la licence de mathématiques

Dérogations Sur dérogation, les étudiant(e)s n'ayant pas tout à fait validé leur année de L3 peuvent être inscrits à des enseignements de Master 1 et peuvent valider des crédits. Ils ne peuvent toutefois pas être inscrits au Master sans le diplôme de Licence.
Toute demande de dérogation doit être déposée au secrétariat du M1/L3 (pièce 307) lors de l'inscription pédagogique.

Organisation du master

Le Master présente deux aspects complémentaires : il vise d'une part à la consolidation de vos connaissances générales de mathématiques, acquises au niveau de la licence ; d'autre part, il propose en 1ère année un début de spécialisation. La spécialisation s'effectue complètement en 2ème année.

Une spécialité peut elle-même présenter plusieurs parcours. Les parcours sont constitués d'un ensemble cohérent d'unités d'enseignement permettant à l'étudiant d'acquérir des compétences dans un domaine donné.

La spécialité mathématique propose trois parcours :

1. Mathématiques fondamentales.
2. Modélisation aléatoire (mathématiques appliquées)
3. Logique Mathématique et Fondements de l'Informatique.

Conseils pour le choix des parcours

Il est essentiel de comprendre que les choix de M1 ne conditionnent pas forcément la suite du cursus (ex : un étudiant ayant choisi modélisation aléatoire en M1 peut tout à fait passer l'agrégation ou poursuivre en M2 mathématiques fondamentales sur décision du jury d'admission).

Il est important de préciser aussitôt que possible votre orientation en vue de la deuxième année. Cela permettra de choisir avec pertinence vos enseignements en M1.

Si vous envisagez ultérieurement :

- le M2 Mathématiques fondamentales : choisissez le parcours Mathématiques fondamentales en M1 mais rien ne vous interdit de choisir des cours de mathématiques appliquées.

- le M2 Modélisation aléatoire : choisissez le parcours Modélisation aléatoire ou Mathématiques fondamentales mais validez obligatoirement le cours de Probabilités I, le cours de staistique fonfdamentale (deuxième semestre), un cours d'analyse du premier semestre (analyse réelle ou analyse fonctionnelle) et ne négligez pas l'informatique.

- le M2 de Logique Mathématique ou le M2 de cryptologie, choisissez le parcours Mathématiques fondamentales ou Logique Mathématique, mais validez l'UE d'Algèbre et les UE de Logique.

- le M2 ISIFAR après le M1 spécialité mathématiques : choisissez le parcours Modélisation aléatoire, validez les cours de Probabilités, Statistique fondamentale et Mathématiques financières mais soignez votre formation en Informatique, essayez notamment de vous initier aux bases de données en validant des UE supplémentaires.

- l'agrégation : choisissez soit le parcours mathématiques fondamentales soit le parcours modélisation aléatoire.

Formalités

Inscription pédagogique Il s'agit de l'inscription aux enseignements de l'UFR de mathématiques. L'inscription pédagogique est obligatoire. Si l'étudiant(e) n'est pas incrit(e) à un enseignement, il (elle) ne peut pas passer l'examen.
Pour l'inscription pédagogique au premier semestre, l'étudiant(e) devra se munir de sa carte d'étudiant, et se rendre au secrétariat de la scolarité.
L'inscription pédagogique aux enseignements du deuxième semestre se fera après l'affichage des résultats des examens du premier semestre.

Contrôle des connaissances et examens

Inscription aux examens Pour être inscrit(e) aux examens, un(e) étudiant(e) doit remplir obligatoirement les conditions suivantes :

- être inscrit(e) administrativement à l'Université pour l'année en cours et posséder sa carte d'étudiant de Paris-Diderot (visée par le centre de médecine préventive).
- être inscrit(e) pédagogiquement aux enseignements concernés au début de l'année ou du semestre universitaire,

Deuxième session Pour pouvoir se présenter à la 2ème session, il est indispensable d'avoir été inscrit(e) à la première session (janvier ou mai).

Convocation aux examens

- Il n'y a pas de convocation individuelle.
- Les dates d'examen ne sont pas données au téléphone.
- Les étudiant(e)s doivent consulter
  - soit le site web de l'UFR : http ://www.math.univ-paris-diderot.fr/formations/masters/ma
  - soit le tableau d'affichage

Enseignements extérieurs à l'UFR On attire l'attention des étudiant(e)s inscrit(e)s à des UE dans un autre cycle, une autre UFR ou dans une autre université sur le fait qu'il est très difficile, pour des raisons matérielles, de tenir compte d'éventuels chevauchements dans les calendriers des examens.

Contrôle continu

Les textes officiels actuellement en application imposent un contrôle des connaissances associant contrôle continu et examens terminaux (chacun de ces modes de contrôle entrant pour au moins 20 % dans la note finale).

Règlement du jury

Conformément aux règlements nationaux, le Président de l'Université, sur proposition du Directeur de l'UFR de mathématiques, désigne par arrêtés les jurys de diplômes (Licences, Master), et jurys auxiliaires pour chaque enseignement.

Chaque jury de diplôme (Licence, Master) délibère ; il établit la liste des étudiant(e)s reçu(e)s, qui est transmise au service des attestations de diplômes.

Un(e) étudiant(e) ne peut être déclaré(e) reçu(e) au diplôme si il (elle) ne peut pas justifier des titres donnant accès au master (suivant les cas une Licence ou une décision de dispense)

Un(e) étudiant(e) est déclaré(e) reçu(e) au diplôme si il (elle) a validé toutes les UE correspondant au diplôme, ou par compensation suivant les règles suivantes :

Règles de compensation Chaque semestre est validé lorsque l'étudiant a validé des unités d'enseignements (UE) correspondant à au moins 80% des crédits requis et en outre lorsque la moyenne pondérée de l'ensemble des UE requises est supérieure ou égale à 10/20, **et chaque note doit être supérieure ou égale à 7/20**. La même règle s'applique pour la validation de l'année.

1 Le parcours Mathématiques Fondamentales

Le parcours Mathématiques Fondamentales se propose de donner à l'étudiant une solide culture mathématique. "Fondamental" ne signifie pas ici "pur" par opposition à "appliqué" ou "applicable" mais simplement "approfondi".

Ce parcours laisse ouvertes de larges possibilités. Il est d'abord conçu pour des étudiant(e)s qui envisagent un M2 de Mathématiques fondamentales ou la préparation à l'Agrégation. Mais choisir ce parcours ne ferme pas la voie au M2 de Modélisation Aléatoire ou à M2 de Logique Mathématique.

En choisissant les UE fondamentales et les UE d'orientation du second trimestre (48 crédits ECTS sur les 60 crédits ECTS qui constituent l'année de Master I), on peut se constituer une culture de mathématicien classique (Algèbre, Géométrie, Analyse), mais aussi de probabiliste, voire de numéricien, d'informaticien ou de statisticien.

On peut envisager de préparer une variété de M2, la préparation à l'agrégation avec une option bien déterminée, voire l'intégration dans une école d'ingénieurs. Pour aborder le Master 2 de mathématiques fondamentales, il est conseillé de choisir de manière équilibrée des unités en algèbre, analyse et géométrie. Pour ceux qui désirent continuer en analyse, il est en outre conseillé de suivre un cours de probabilités, et des cours d'analyse : théorie spectrale, équations aux dérivées partielles.

Le M2 de mathématiques fondamentales Le M2 comporte deux parcours

– Un parcours spécialisé dont l'objectif est de donner à ses étudiant(e)s une formation avancée dans des domaines spécifiques tels que :
  ∗ théorie des groupes, des algèbres, théorie des représentations,
  ∗ topologie algébrique, géométrie algébrique, arithmétique,
  ∗ géométries différentielle, riemannienne, symplectique,
  ∗ systèmes dynamiques, algèbres d'opérateurs,
  ∗ analyse et physique mathématique
  L'acquisition de connaissances solides et spécifiques et la participation à des stages d'initiation à la recherche doivent permettre aux étudiant(e)s de s'engager ensuite dans de bonnes conditions dans la préparation d'une thèse de doctorat dans l'un des domaines des mathématiques, ou

dans l'un des domaines d'application des mathématiques.
– un parcours dit « généraliste » qui propose une formation approfondie en mathématiques permettant en particulier de préparer dans de bonnes conditions les concours d'enseignement.

Enseignements proposés

S1

U.E.	**Crédits**	**Volume horaire**		
		CM	**TD**	**TP**
Algèbre	12	4	6	0
Functional Analysis	12	4	6	0
Géométrie Différentielle	6	2	3	0
Spectral Theory	6	2	3	0
Probabilités	12	4	6	0
Logique du 1er ordre	6	2	3	0
Logique et Complexité	6	2	3	0
Analyse Réelle	6	2	3	0
Algorithmique et Projet Informatique	6	2	0	3
Anglais (obligatoire)	6	0	4	0

S2

U.E.	**Crédits**	**Volume horaire**		
		CM	**TD**	**TP**
Arithmétique	12	4	6	0
Topologie Algébrique	12	4	6	0
Géométrie Différentielle	6	2	3	0
Incomplétude et Indécidabilité	6	2	3	0
Théorie des Ensembles	6	2	3	0
Équations aux Dérivées Partielles	6	2	3	0
Base des Méthodes Numériques	6	2	3	0
Probability and stochastic processes	12	4	6	0
Statistique Fondamentale	6	2	3	0
Statistique bayésienne et tests	6	2	3	0
Mathématiques Financières	6	2	3	0
Projets : Calcul Scientifique et Statistique	6	2	0	3

2 Le parcours Modélisation aléatoire

Le parcours Modélisation aléatoire se propose de donner à l'étudiant une solide culture mathématique en mathématique appliquée avec une coloration particulière en probabilités et statistiques, bien que les enseignements d'analyse, analyse numérique et informatique aient aussi une part importante.
Ce parcours laisse ouvertes de larges possibilités. Il est d'abord conçu pour des étudiant(e)s qui envisagent un M2 de modélisation aléatoire/finance mais il ne ferme pas la porte de la préparation à l'Agrégation.
par rapport au parcours de mathématiques fondamentales, les étudiant(e)s sont relativement plus dirigé(e)s : il y a plus d'enseignements imposés et moins de choix. En particulier, le premier semestre ne laisse pas de choix aux étudiant(e)s, avec des enseignements de probabilités, d'analyse et d'informatique obligatoires.

Le M2 de modélisation aléatoire
Le master spécialité *modélisation aléatoire* propose une formation solide en statistique et méthodes stochastiques tout en développant les applications dans des domaines porteurs à l'heure actuelle. L'étudiant aura le choix entre une formation statistique (théorique ou appliquée), et une spécialisation dans le domaine financier. Ces deux orientations, qui s'articulent relativement bien autour de le formation statistique, ouvrent de nombreux débouchés dans des domaines très variés. L'objectif de la formation est double :

1. Dans la spécialité recherche : Assurer une initiation à la recherche fondamentale en vue d'une thèse sur l'un des thèmes suivants :
   (a) Estimation fonctionnelle (ondelettes, adaptation,...), statistique des extrêmes, statistique des processus, problèmes inverses et mise en oeuvre numérique, théorie du signal et imagerie, algorithmes stochastiques et méthodes numériques, méthodes neuronales, modèles à régimes cachés
   (b) Modélisation en économie et finance : données haute fréquence, modèles à volatilité aléatoire et inférences statistiques associées, optimisation de porte feuilles et couverture d'options dans les marchés imparfaits (marchés incomplets, modèles avec coûts de transaction, observation partielle), modélisation d'informations supplémentaires (délits d'initiés), méthodes numériques pour l'évaluation de produits dérivés
   (c) Analyse de modèles dans divers autres domaines scientifiques :

biométrie, statistique, écologie et environnement, génétique moléculaire, médecine

(d) Apprentissage statistique, data mining. méthodes de compression de données et de réduction de la dimension dans les systèmes complexes, optimisation de la prédiction. Ces techniques sont très importantes dans des domaines d'applications tels que : bioinformatique, génétique, text-mining, astrophysique

(e) Modèles aléatoires de systèmes complexes. Exemples génériques : processus de Markov, réversibilité, propriétés spectrales, convergence vers l'équilibre. Modèles fondamentaux en mécanique statistique : modèles d'Ising, interfaces, représentation en marche aléatoire, polymères et copolymères, milieux désordonnés.

2. Dans la spécialité professionnalisante :
   Donner aux étudiant(e)s une formation de haut niveau en probabilités, statistique et finance qui offre de bonnes perspectives d'emploi dans le secteur recherche et développement des banques et organismes financiers ou comme ingénieur statisticien dans une entreprise. Un domaine sensible en plein essor est celui du contrôle du risque (banque, assurance, environnement, alimentation, production industrielle) et dans cette optique nous développons des cours autour de la statistique des extrêmes.

Le M2 ISIFAR C'est un master professionalisant proposé par l'Université Paris Diderot avec l'Université Paris X Nanterre. ISIFAR (Ingénierie Statistique et Informatique de la Finance, de l'Assurance et du Risque) est une spécialité de la mention "mathématiques et informatique" du MASTER "Sciences et Applications". On renvoie au site web de ce master pour plus d'informations.

Enseignements proposés

S1

U.E.	**Crédits**	**Volume horaire**			**obligatoire**
		CM	**TD**	**TP**	
Probabilités	12	4	6	0	oui
Analyse Réelle	6	2	3	0	oui
Algorithmique et Projet Informatique	6	2	0	3	oui
Anglais	6	0	4	0	oui

S2

U.E.	**Crédits**	**Volume horaire**			**obligatoire**
		CM	**TD**	**TP**	
Équations aux Dérivées Partielles	6	2	3	0	non
Base des Méthodes Numériques	6	2	3	0	oui
Probability and stochastic processes	12	4	6	0	non
Statistique Fondamentale	6	2	3	0	oui
Statistique bayésienne et tests	6	2	3	0	non
Mathématiques Financières	6	2	3	0	non
Projets : Calcul Scientifique et Statistique	6	2	0	3	oui

3 Le parcours Logique Mathématique et Fondements de l'informatique

Le Master I Logique Mathématique et Fondements de l'informatique permet de renforcer les connaissances en mathématiques fondamentales acquises en Licence et offre un début d'orientation vers la logique mathématique et ses applications. Ce parcours est d'abord conçu pour des étudiant(e)s qui envisagent un M2 LMFI mais il ne ferma pas la porte de la préparation à l'Agrégation.

le M2 Logique et Fondements de l'informatique

La spécificité de cette spécialité réside dans une formation à l'ensemble des branches de la logique mathématique et aux rapports qu'elle entretient avec l'informatique et le reste des mathématiques. Cette formation qui existe depuis une vingtaine d'années n'a d'équivalent nulle part en France.
L'objectif de la spécialité est de :

- Compléter la formation en mathématiques avec une dominante en logique mathématique et une ouverture sur l'informatique théorique.
- Fournir une orientation par l'intermédiaire de cours spécialisés et d'un stage d'initiation à la recherche dans l'un des domaines de la logique mathématique ou des fondements de l'informatique.

La suite naturelle du maser est la préparation d'un doctorat de mathématiques ou d'informatique fondamentale.

Enseignements proposés

S1

U.E.	**Crédits**	**Volume horaire**		
		CM	**TD**	**TP**
Algèbre	12	4	6	0
Functional Analysis	12	4	6	0
Géométrie Différentielle	6	2	3	0
Spectral Theory	6	2	3	0
Probabilités	12	4	6	0
Logique du 1er ordre	6	2	3	0
Logique et Complexité	6	2	3	0
Analyse Réelle	6	2	3	0
Algorithmique et Projet Informatique	6	2	0	3
Anglais (obligatoire)	6	0	4	0

S2

U.E.	**Crédits**	**Volume horaire**		
		CM	**TD**	**TP**
Arithmétique	12	4	6	0
Topologie Algébrique	12	4	6	0
Incomplétude et Indécidabilité	6	2	3	0
Théorie des Ensembles	6	2	3	0
Équations aux Dérivées Partielles	6	2	3	0
Base des Méthodes Numériques	6	2	3	0
Probability and stochastic processes	12	4	6	0
Statistique Fondamentale	6	2	3	0

Le maths club

Le Maths Club de Paris Diderot est un séminaire pour les étudiants de mathématiques de Licence et de Master. Il a lieu sur le campus des étudiants (d'abord Jussieu puis maintenant la Halle aux Farines) par opposition à tous les séminaires qui ont lieu à Chevaleret, chez les enseignants.
Ce séminaire est évidemment ouvert à tous dans la mesure des places disponibles (mais l'amphi 1A de la Halle aux Farines est grand !) et reçoit la visite d'un public varié : étudiants d'informatique, étudiants d'autres universités ou de classes préparatoires, professeurs du secondaire et aussi bien sûr des collègues.
Ce séminaire à lieu le lundi à 16h30 (mais pas tous les lundis) et dure une heure. Les conférences sont annoncées par voie d'affiches à la Halle aux Farines et à Chevaleret, et sur le site de l'IREM
http ://www.iremp7.math.jussieu.fr/club
Le site du séminaire est
http ://www.mathsclub.fr
Le sous-titre du séminaire est "A quoi çà sert les Maths ? " car c'est bien la question que nos étudiants se posent même après avoir entrepris des études de mathématiques. Le but de ces conférences est de donner des exemples très concrets de l'utilisation des mathématiques dans différents domaines et dans différents métiers. Les conférenciers sont des chercheurs, des enseignants, des industriels.

Les organisateurs de ce séminaire Guillaume Malod, Catherine Muhlrad-Greif et Patrick Simonnetta peuvent être contactés à l'adresse : club@math.jussieu.fr

Description des enseignements

Functional Analysis L'analyse fonctionnelle célèbre les noces de l'algèbre linéaire et de la topologie. L'attention se porte sur des espaces vectoriels de dimension infinie, souvent munis d'une norme qui en fait des espaces métriques complets, par exemple l'espace des fonctions continues $[0,1] \to \mathbb{R}$. Une différence, et de taille, entre les dimensions finie et infinie, est l'absence de compacité de la boule unité dans le second cas. Cependant, les applications classiques au calcul des variations, et partant aux équations aux dérivées partielles, sont fondées sur des ersatz de "compacité forte". Ces résultats sont obtenus dans des espaces de Lebesgue ou de Sobolev, dont le caractère complet repose sur l'existence de la mesure de Lebesgue.

(1) Rappels de théorie abstraite de la mesure : construction de la mesure de Lebesgue ; intégration ; théorème de changement de variables.

(2) Mesures de Radon ; approximation par l'intérieur par des compacts et théorème de Lusin ; théorème de Riesz-Markoff ; convergence préfaible

(3) Application des mesures produits et du théorème de Fubini : produit de convolution ; régularisation.

(4) Théorème de Radon-Nikodym.

(5) Espaces vectoriels topologiques localement convexes ; applications linéaires continues ; théorème de Hahn-Banach ; espaces de Banach ; espace dual.

(6) Théorème de Baire et ses conséquences.

(7) Espaces de Lebesgue ; théorème de Riesz-Fischer ; dualité entre L_p et L_q.

(8) Compacité : théorème de Riesz ; topologie préfaible et théorème de Banach-Alaoglu ; théorème d'Ascoli ; théorème de Weil de compacité dans L_p.

(9) Dérivée faible ; espace de Sobolev ; inégalité de Poincaré ; théorème de Rellich.

(10) Introduction au calcul des variations : méthode directe ; problème de Dirichlet pour les fonctions harmoniques — existence et régularité.

Algèbre Le cours comporte deux parties. La première partie (1-5) est consacrée à la théorie de Galois et ses applications. On intègre les compléments utiles sur les anneaux, anneaux de polynômes et groupes. La seconde partie (6-8) aborde la théorie des modules. On développe les notions de bases utiles pour un cours plus avancé utilisant l'algèbre commutative, les résultats de structure des modules de type fini sur les anneaux principaux avec les applications correspondantes, et le calcul des idéaux dans les anneaux de polynômes.

1. Anneaux commutatifs, anneaux de polynômes : rappels et compléments.
2. Extensions de corps : généralités ; algébricité ; corps de décomposition, clôture algébrique ; corps finis, corps cyclotomiques.
3. Groupes : action de groupe, théorèmes de Sylow, groupes résolubles.
4. Théorie de Galois : groupe de Galois ; extensions normales, extensions séparables, correspondance de Galois.
5. Applications de la théorie de Galois : résolubilité par radicaux, constructibilité.
6. Introduction à la théorie des modules : généralités, exemples, éléments de torsion, modules libres, produit tensoriel.
7. Modules sur les anneaux principaux : théorèmes de structure ; groupes abéliens de type fini, réseaux ; réduction des endomorphismes des espaces vectoriels de dimension finie.
8. Modules et anneaux noethériens ; cas des polynômes ; bases de Gröbner.

Probabilités

Sommaire du cours

Probabilités discrètes : Axiomes des probabilités, conditionnement, indépendance, variables aléatoires discrètes (loi, espérance, variance), promenade aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

Espaces de probabilités : Rappel de théorie de la mesure, variable aléatoire, loi, espérance des v.a. réelles (rappel des théorèmes limites d'intégration), probabilités produits.

Variables aléatoires réelles : Fonction de répartition, médiane, lois, densités, simulation par inversion de la fonction de répartition.

Moments et transformations intégrales de v. a. réelles : Inégalités de Markov, Tchebichev, Schwarz, Hölder, Jensen. Fonctions génératrice d'une v.a. entière, fonction caractéristique d'une v.a. réelle.

Vecteurs aléatoires I : lois, densités, covariance, fonction caractéristique, formule du changement de variable différentiable et densités.

Somme de v.a. réelles indépendantes : Indépendance (de tribus, de v.a.), loi de la somme : convolée, fonction caractéristique, somme d'un nombre aléatoire de v.a. indépendantes (branchement, percolation sur l'arbre binaire).

Lois des grands nombres : convergence en probabilité, convergence presque sûre. Loi faible/forte des grands nombres. Loi 0-1 de Kolmogorov.

Convergence en loi et théorème de la limite centrale : convergence étroite des probabilités, théorème du porte-manteau. Sur $\mathbb{R}^d$, convergence des fonctions caractéristiques, théorème fondamental de la statistique, théorème de la limite centrale.

Vecteurs aléatoires II : matrice de covariance, vecteurs aléatoires gaussiens, théorème de la limite centrale vectoriel.

Méthodes hilbertiennes : régression linéaire, espérance conditionnelle et projection orthogonale dans L^2, extension à L^1.

Marche aléatoire : marche aléatoire et potentiel.

Analyse réelle

- Espaces métriques, généralités : Définition des espaces métriques et des espaces normés. Espaces normés de suites de nombres complexes. Inégalités de Hölder, Cauchy-Schwarz, Minkowski. Espace normé des fonctions continues sur un intervalle. Espace normé des fonctions bornées sur un ensemble non vide. Rappels de topologie : ouverts, fermés, intérieur, adhérence, exemples. Espaces métriques complets.
- Espaces de Banach : Espaces de Banach. Exemples classiques d'espace de Banach : espace de suites, fonctions continues sur un intervalle fermé et fonctions bornées. L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle munis de la norme L^p n'est pas complet. Complétion d'un espace métrique. Théorème d'existence des complétions. Rappel sur les ensembles dénombrables. Séparabilité. Exemples : ℓ^p et ℓ^∞. Opérateurs linéaires dans les espaces normés. Fonctionnelles linéaires continues. Espace dual d'un espace vectoriel normé.
- Compacité : Compacité dans les espaces topologiques : définition. Compacité séquentielle. Les ensembles fermés et bornés dans les espaces métriques ne sont en général pas compacts : exemples. Précompacité : motivation de la définition. Théorème d'équivalence des trois définitions dans les espaces métriques complets. Propriétés des ensembles compacts. Cube de Hilbert. Théorème de Riesz. Compacité et continuité. Théorème d'Ascoli-Arzela. Applications et exemples.
- Espace L^p : Intégration d'une fonction mesurable sur un espace mesuré. Théorème de convergence monotone, théorème de convergence dominée. Ensembles des fonctions sommables S^p. Semi-norme. Classes d'équivalence, espaces normés L^p. Complétude de ces espaces. Convolution. Régularisation. Approximation de l'unité.
- Espace de Hilbert : Espaces hermitiens. Propriété élémentaires : inégalité de Bessel, Cauchy-Schwarz. Espaces de Hilbert. Théorème de projection sur un convexe fermé. Base hilbertienne. Espaces de Hilbert séparables. Théorème d'existence d'une base hilbertienne dans les espaces séparables. Formule de décomposition dans une base hilbertienne. Théorème de Plancherel et identité de Parseval. Séries de Fourier. Complétude du système trigonométrique dans $L^2(T)$.
- Analyse de Fourier : Transformation de Fourier sur $L^2(T)$. Isomorphisme de $L^2(T)$ sur $\ell^2(\mathbb{Z})$. Extension à $L^1(T)$. Théorèmes de convergence usuels (Dirichlet, Féjer) Isomorphisme de l'espace des fonctions infiniment régulières sur le tore sur l'espace des suites à décroissance rapide. Analyse de Fourier sur $\mathbb{R}^n$: Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$. La classe S de L. Schwartz. Prolongement à $L^2(\mathbb{R}^n)$ et théorème de Plancherel.

Références

- Walter Rudin : Analyse réelle et complexe Dunod
- Lieb et Loss : Analysis American Mathematical Society.

Géométrie Différentielle

Sommaire du cours

le théorème d'inversion locale et ses avatars : immersions, submersions, fonctions implicites, sous-variétés de R^n : équations et paramétrages, stabilité de la transversalité, exemples de singularités.

Objets locaux et leurs transformations par difféomorphisme : champs de vecteurs et équations différentielles, formes différentielles, champs de sous-espaces tangents et intégralité, structures métriques, symplectiques, complexes.

Variétés et leurs fibrés associés, objets globaux. Théorème de Stokes.

La fin du cours sera déterminée en fonction de l'auditoire.

Références

F. PHAM, Géométrie et calcul différentiel sur les variétés, InterEditions, 1992.

M.CHAPERON, Calcul différentiel et calcul intégral. Dunod, 2003

Théorie Spectrale

Sommaire du cours

Spectre d'un opérateur, résolvante

Théorie spectrale des opérateurs compacts. Alternative de Fredholm. Opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Théorie spectrale des opérateurs autoadjoints bornés.

Opérateurs non bornés. Théorie spectrale des opérateurs autoadjoints non bornés.

Références Les références ci-après traitent des questions qui feront l'objet du cours :

M. Reed, B. Simon, Methods of modern Mathematical Physics, 1, Academic Press 1978.

W. Rudin, Functional Analysis, Mac Graw Hill 1973.

H. Brezis, Eléments d'analyse fonctionnelle, Masson 1983.

Logique du premier ordre Ce cours expose les notions de base de la logique mathématique. L'étude du langage et du raisonnement mathématiques constitue l'objectif premier de cette discipline. Elle est utile à tout étudiant en mathématiques, en particulier à ceux qui s'intéressent également à l'informatique.

Sommaire du cours

Notions élémentaires de cardinalité : ensembles finis, ensembles dénombrables, puissance du continu. Théorème de Cantor-Bernstein.

Calcul propositionnel. Mise sous forme normale.

Langages du premier ordre. Formules ; structures ; satisfaction ; théories ; modèles.

Syntaxe et sémantique. Théorème de compacité.

Systèmes de déduction. Théorème de complétude (langages dénombrables).

Isomorphismes ; équivalence élémentaire.

Théorème de Löwenheim-Skolem.

Théories complètes. Critère de Vaught.

Références

J.L. Krivine, Logique et Théories Axiomatiques (LTA), cours polycopiés, Université de Paris 7.

R. Cori et D. Lascar, Logique Mathématique, cours et exercices, en 2 tomes, Dunod, 2003.

Logique et Complexité L'objectif de ce cours est d'abord de présenter les notions logiques de décidabilité et d'indécidabilité. On définit ensuite la notion de réduction entre problèmes. On présente enfin la notion de complexité qui prend en compte les ressources (temps de calcul, espace mémoire) nécessaires à la résolution d'un problème sur machine.

Sommaire du cours

Fonctions récursives. Modèles de calcul (machines de Turing, Random Access Machines,...).

Equivalence fonctions récursives/fonctions calculables. Machine universelle. Théorème d'énumération.

Indécidabilité du problème de l'arrêt d'une machine.

Réduction d'un problème à un autre. Problème complet pour une classe.

Fonctions définissables dans l'arithmétique de Peano.

Mesures de complexité (temps, espace). Classes de complexité en temps polynomial P et NP. Exemples de problèmes (satisfaction propositionnelle, graphes...).

Classes de complexité en espace logarithmique L et NL. Hiérarchie.

Réductions en temps polynomial. Problèmes NP-complets. Théorème de Cook. Exemples de problèmes NP-complets (graphes, optimisation).

Introduction aux méthodes permettant de casser la barrière de la complexité : problèmes d'approximation, classes probabilistes.

Références

R. Cori et D. Lascar, Logique Mathématique, cours et exercices, tome 2, Dunod, 2003.

R. Lassaigne et M. de Rougemont, Logique et complexité, Hermès, 1996.

Algorithmique et Projet Informatique

Initiation à l'algorithmique et à la programmation en C.

Le langage C sera introduit sans prérequis : instructions de programmation structurée, pr'ec'edence des op'erateurs, types de variables, passage de param'etres, tableaux, structures, pointeurs, allocation dynamique, fichiers, fonctions.

Algorithmes étudiés : tris, opérations sur listes chainées, piles, tas, graphes.

Notion de re'cursivit'e, et de programmation dynamique.

Modalités d'évaluation : Pour chaque session : 1 examen écrit coefficient 2/3 et 1 épreuve machine coefficient 1/3.

Arithmétique

1. Structures finies
   - Les corps finis : construction, unicité, substitution de Frobenius, théorie de Galois, cyclicité du groupe multiplicatif, Théorème de Chevalley-Warning
   - L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: Lemme des restes chinois, structure de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$,
   - Les nombres p-adiques : Construction, structure d'anneau, structure multiplicative des entiers p-adiques, valuation p-adique, étude des carrés p-adiques,
   - Le théorème d'Ostrowski (classification des topologie sur les nombres rationnels)
   - Les caractères des groupes finis (rappel du théorème de structure des groupes abéliens finis), le groupe dual d'un groupe abélien fini
   - Les sommes de Gauss
   - La fonction Gamma : caractérisation comme fonction d'une variable complexe, formules des compléments, formule de Legendre-Gauss, formule de Stirling, l'inverse de la fonction Gamma est entière.
2. Étude de l'ensemble des nombres premiers
   - La fonction zeta de Riemann, vue comme série de Dirichlet et comme produit Eulérien.
   - Les polynômes de Bernoulli. Valeurs aux entiers de la fonction zêta.
   - Prolongement analytique de la fonction zêta.
   - Équation fonctionnelle de la fonction zêta.
   - Le théorème des nombres premiers (preuve de Newman).
   - Étude des zéros de zêta.
3. Cyclotomie
   - Le polynôme cyclotomiques. Irréductibilité de ce polynôme.
   - Pour n entier fixé, il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo n.
   - Application : tout groupe abélien fini est groupe de Galois d'une extension finie de Q.
   - Toute extension quadratique de Q est contenue dans une extension cyclotomique.
   - Étude locale des corps cyclotomiques : sous-groupe de décomposition, d'inertie en un nombre premier.
   - Étude des sous-corps des corps cyclotomiques.
   - La loi de réciprocité quadratique.
   - Les fonctions L de Dirichlet, étude analytique.
   - Le théorème de la progression arithmétique
4. Équations diophantiennes
   - Étude de l'équation de Fermat pour les exposants 3 et 4.
   - Méthode de Kummer pour aborder l'équation de Fermat.
   - Méthode locales : le lemme de Hensel.
   - Le théorème de Legendre sur les formes quadratiques en trois variables.

- Le principe de Hasse.
- Le théorème de Mason et la conjecture abc. Applications.

Topologie Algébrique Ce cours propose une initiation à la topologie algébrique, à travers les constructions typiques que sont le groupe fondamental, l'homologie et la cohomologie singulières.

On insistera sur les aspects géométriques indispensables pour soutenir l'intuition, ce qui nous amènera à manipuler des surfaces, des espaces projectifs, et autres objets « visuels », et à calculer certains de leurs invariants homotopiques.

Le cours sera aussi l'occasion de découvrir les notion fondamentales de la théorie des catégories, également utiles dans d'autres branches des mathématiques. Ces notions seront utilisées pour démontrer des théorèmes de topologie algébrique, mais également pour offrir une vision plus élevée des concepts mis en jeu.

Parmi les théorèmes qui seront démontrés en cours, on trouvera le théorème du point fixe de Brouwer (celui de Lefschetz si on a le temps), le théorème de Borsuk-Ulam, la dualité d'Alexander, accompagnés bien sûr d'applications en topologie.

Le cours se terminera par un chapitre sur les variétés différentiables, dont le thème principal sera la dualité de Poincaré et quelques unes des ses applications. Si on a le temps, on introduira l'homologie et la cohomologie de de Rham, ce qui permettra d'entrevoir quelques uns des liens entre la topologie algébrique, l'analyse et la physique.

Les pré-requis sont les connaissances de niveau L3 en topologie générale et en algèbre linéaire. Les notions d'algèbre non nécessairement traitées en L2-L3 (modules sur un anneau, produit tensoriel, etc) seront exposées au moment voulu.

En matière de bibliographie, il existe de nombreux ouvrages plus ou moins récents. Un ouvrage récent, riche de contenu, est le livre d'Allen Hatcher « Algebraic Topology », qui a l'avantage d'être disponible gratuitement sur le web :

`http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`

Si les étudiant(e)s le souhaitent, le cours (tout ou partie) pourra être fait en Anglais.

Indécidabilité et incomplétude.

Compétences visées Comprendre la portée des résultats d'indécidabilité et d'incomplétude. Maîtriser les méthodes élémentaires de preuve de décidabilité.

Sommaire du cours

Rappel sur les fonctions récursives. Thèse de Church.

Ensembles récursifs et ensembles récursivement énumérables.

Problèmes décidables. Problèmes indécidables.

Prouvabilité dans l'arithmétique de Peano. Fonctions représentables.

Indécidabilité de l'arithmétique de Peano. 1er théorème d'incomplétude de Gödel.

Méthode d'élimination des quantificateurs. Exemples de théories décidables (arithmétique de Presburger,...).

Autres méthodes de preuve de décidabilité (exemples : jeux,...).

Théorie des ensembles

Compétences visées Maîtriser l'axiomatique de base en théorie des ensembles et son application aux mathématiques.

Sommaire du cours

Introduction aux axiomes de la théorie des ensembles.

Cardinaux et ordinaux.

Axiome du choix et énoncés équivalents (lemme de Zorn). Applications à l'algèbre linéaire et à l'analyse.

Algèbres de Boole. Filtres et ultrafiltres.

Théorème de représentation de Stone.

Équations aux dérivées partielles

1. Quelques exemples importants. Solutions fortes.
   (a) Quelques notions préliminaires de géométrie différentielle. Exemples d'opérateurs aux dérivées partielles.
   (b) Équation de Poisson. Solution fondamentale. Formules de moyennes. Problèmes aux limites. Solutions fortes. Principes du maximum. Lemme de Harnack. Estimations locales des dérivées partielles des solutions. Théorème de Liouville. Unicité pour le problème de Dirichlet.
   (c) Équation de la chaleur. Solution fondamentale. Solution du problème de Cauchy. Caractère régularisant. Problèmes aux limites. Solutions fortes. Formules de moyennes. Principes du maximum. Énergie.
   (d) Équations des ondes. Problème de Cauchy. Solution du problème de Cauchy dans $\mathbb{R}^3 \times [0, T]$. Propagation à vitesse finies. Énergie.
2. Espaces de Sobolev
   (a) Dérivées au sens faible. Propriétés élémentaires. Définition des espaces de Sobolev.
   (b) Théorèmes de prolongement.
   (c) Théorème de densité.
   (d) Injections de Sobolev.
   (e) Inégalités de Poincaré, Inégalité de Poincaré Wiertinger, Théorème de compacité de Rellich.
   (f) Théorèmes de traces
3. Solutions faibles de problèmes aux limites avec des équation elliptiques
   (a) Formules d'intégration par parties
   (b) Théorème de Lax-Milgram.
   (c) Solutions faibles du problème de Dirichlet : existence et unicité.
   (d) Régularité des solutions faibles : quotients différentiels, régularité locale, régulatité jusqu'au bord.
   (e) Solutions faibles du problème de Neumann
   (f) Principe du maximum faible
   (g) Problème aux valeurs propres pour le problème de Dirichlet. Théorie spectrale.
4. Solutions faibles de problèmes aux limites avec des équation paraboliques
   (a) Existence pour le problème de Dirichlet : méthode de Galerkin

Références

– L. Evans : Partial differential equations Graduate Studies in Mathematics, 19. American Mathematical Society
– H. Brézis : Analyse fonctionnelle et applications.

Bases des méthodes numériques pour les équations aux dérivées partielles

1. Solutions faibles des problèmes aux limites pour les équations elliptiques en dimension un
   (a) Exemples
   (b) Dérivation au sens faible. L'espace H^1. Propriétés : densité des fonctions régulières, continuité, régularité Hölder, compacité.
   (c) problèmes aux limites : solutions faibles. Théorème de Lax-Milgram. Existence et unicité. Régularité.
2. Méthodes des éléments finis pour les équations elliptiques en dimension un
   (a) Présentation de la méthode.
   (b) Mise en oeuvre de la méthode. Programmation en scilab.
   (c) Convergence et estimations d'erreur dans H^1.
   (d) Estimations d'erreur dans L^2.
3. Méthodes des éléments finis pour les équations elliptiques en dimension arbitraire
   (a) Quelques notions préliminaires de géométries différentielle. Exemples d'opérateurs aux dérivées partielles.
   (b) Présentation axionmatique de la méthode des éléments finis.
   (c) Mise en oeuvre de la méthode. Programmation en Freefem++
   (d) Convergence et estimations d'erreur dans H^1.
   (e) Estimations d'erreur dans L^2.
4. Méthode des différences finies pour des problèmes elliptiques et paraboliques
   (a) Notion de consistance, stabilité, convergence
   (b) Étude du θ-schéma. Condition CFL.
   (c) Programmation en Scilab.
   (d) Principe du maximum. Décentrage.

Références

- Raviart, Thomas. Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles.
- F Hecht et O. Pironneau http ://www.freefem.org/
- Quarteroni A., Sacco R., and Saleri F. Numerical mathematics. Springer, 2000.

Probability and stochastic Processes Un des buts de cours est de fournir une bonne préparation à l'agrégation, option probabilités, ou à tout 2ème année de master à orientation probabiliste.

Sommaire du cours

Convergence en loi et théorème de la limite centrale

Espérance conditionnelle

Martingales et applications

Chaînes de Markov et applications

Références

D.Williams, Probability with martingales, Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

G.R. Grimmett , D.R. Stirzaker, Probability and random processes, second edition. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1992 .

M. Benaïm , N. El Karoui, Promenade aléatoire, Editions de l'Ecole Polytechnique (Palaiseau), 2004.

Statistique Fondamentale Le but de cet enseignement est de développer sur un plan théorique les principaux outils de probabilités numériques et de statistique pour la modélisation. Ces outils seront illustrés systématiquement par de la programmation (sur les logiciels MATLAB et MAPLE) et par l'utilisation de logiciels de statistique plus spécifiques (STATLAB, STAGRAPH). En particulier, cet enseignement couvrira des parties du programme de l'agrégation (partie modélisation, option Probabilités et Statistiques). Aucune connaissance préalable en programmation n'est requise.

Sommaire du cours

Notion de modélisation, d'erreur expérimentale, modèle statistique (modèle binomial, de Poisson, exponentiel, normal). Introduction à l'estimation statistique, à la théorie des tests, notion d'intervalle de confiance. sur machine simulation d'une variable aléatoire, calcul approché d'intégrales par méthodes de Monte Carlo. Validation des résultats numériques, construction d'intervalles de confiance sur données numériques, comparaison de populations, validation d'hypothèses.

Vecteurs gaussiens, Théorème de Cochran. Modèle linéaire gaussien. Estimation par les moindres carrés. Test de Fisher, de Student. Théorème de la limite centrale multidimensionnel. Test du χ^2. sur machine mise en oeuvre sur données numériques des méthodes du modèle linéaire. Analyse de la variance, régression. Analyse ascendante, descendante. Stepwise. Introduction à l'analyse des données multidimensionnelles. Analyse en composantes principales.

Échantillonnage, fonction de répartition empirique, théorème de Glivenko-Cantelli. Test de Kolmogorov-Smirnov. Chaînes de Markov homogènes à espace d'états au plus dénombrable. Chaînes irréductibles. Théorie asymptotique, probabilité Invariante, convergence en loi.

sur machine simulation du comportement asymptotique d'une chaîne de Markov, processus de comptage, temps d'atteinte. Introduction aux algorithmes stochastiques : algorithme de Metropolis, méthodes de Monte Carlo par chaîne de Markov.

Statistique bayésienne et tests L'objectif général de ce cours est deprésenter les thèmes fondamentaux qui ne sont pas introduits en Statistique fondamentale :

- l'inférence bayésienne
- les tests
- quelques notions sur la sélection/vérificationdemodèles

Sommaire du cours

Inférence bayésienne (avec un peu de théorie de la décision)

- Lois a priori, risque bayésien, estimateur bayésien, admissibilité
- Risque maximin-minimax
- Introduction aux techniques de minoration du risque. Inégalités de Van-Trees
- Bayésien empirique : motivations

Tests (en fonction de ce qui aura été vu au cours de Statistique fondamentale)

- Tests binaires Lemme de Neyman et Pearson
- Dualité tests/régions de confiance
- Tests de type chi-deux
- Tests de Fisher,sélection de variables dans les modèles linéaires
- ANOVA
- Puissance,analyseasymptotique

Tests non-paramétriques

- Signe,rangs.
- Test de Shapiro-Wilks, application à la vérification de modèle
- Adéquation(Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling,Cramer-von-Mises)

Références

Davison : Stochastic models. Cambridge University Press

Wasserman : All of statistics. Springer Verlag

Breiman : Statistics with a view towards applications.

Venables and Ripley :MASS Modern applied Statistics with S-plus (and R)

Van der Vaart : Asymptotic Statistics. Cambridge

Mathématiques financières L' objectif de ce cours est de présenter d'une part des notions et des produits de base dans les marchés financiers, et d'autre part, les modélisations mathématiques en temps discret.

1. Les taux d'intérêt : taux simple et composé, notions de capitalisation et d'actualisation.
2. Introduction aux produits financiers : obligations, zéro-coupon bond, future, options Call et Put, européenne et américaine, options exotiques.
3. Modèles discrets à une période : asset risqué et sans risque, stratégie de portefeuille, opportunité d'arbitrage, probabilité risque-neutre, marché complet et incomplet.
4. Martingale à temps discret : définition, temps d' arrêt, martingale arrêté, décomposition de Doob de surmartingale, enveloppe de Snell.
5. Modèles discrets, cas général : marché sans arbitrage, marché complet, évaluation des options européennes et des options américaines, modèle d' arbre binomiale, comportement asymptotique.

TER, projet, ou stage Le TER est un projet individuel ou à deux proposé et encadré par les enseignants du Master.
Le projet consiste à mettre en oeuvre des méthodes numériques variées : méthode de monte-Carlo pour variables indépendantes et chaînes de Markov, réduction de variance, transformées de Fourier rapide, classification, méthodes déterministes d'intégration approchée, schémas numériques pour les équations différentielles, schémas numériques pour les EDP ... L'étudiant rédigera un rapport. Le projet donnera lieu à une soutenance.
Le stage se déroulera soit dans un département recherche et développement d'une grande entreprise du secteur industriel ou tertiaire, soit dans une société de service. Le sujet devra être approuvé par le stage d'au moins deux mois sera suivi par un enseignant. L'étudiant rédigera un rapport. Le stage donnera lieu à une soutenance.