Série d'exercices nº 2. Événements et Probabilités

Exercice 2.1. Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tels que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 3/4$. Donner un encadrement optimal pour la valeur de $\mathbb{P}(A \cap B)$. Donner des exemples dans lesquels les bornes de l'encadrement sont atteintes.

⋆ **Exercice 2.2.** On lance simultanément un dé à n faces et un dé à m faces.

a) Proposer un espace probabilisé pour décrire cette expérience aléatoire.

b) Quelle est la probabilité que le premier dé donne un résultat (strictement) supérieur au premier.

Exercice 2.3. Soit n un entier naturel non nul. En considérant un groupe de n personnes et en supposant que chaque année comporte 365 jours et que les jours de naissances sont tous équiprobables, on veut calculer la probabilité que deux personnes aient la même date d'anniversaire.

a) Proposer un espace probabilisé pour décrire cette expérience aléatoire.

b) Calculer la probabilité que deux personnes au moins soient nées le même jour.

c) Montrer que si $n \geq 23$, cette probabilité est supérieure à $1/2$.

⋆ **Exercice 2.4.** On tire deux cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire ? Si l'on n'a pas obtenu une paire, on a le choix entre jeter l'une des deux cartes tirées et en retirer une parmi les 30 restantes, ou jeter les deux cartes tirées et en retirer deux parmi les 30 restantes. Quelle stratégie donne la plus grande probabilité d'avoir une paire à la fin ?

☺ **Exercice 2.5.** Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire successivement (sans remise) n boules de l'urne, avec $1 \leq n \leq N$.

a) Quel est l'ensemble Ω des résultats possibles ? Calculer $\mathrm{card}(\Omega)$.

b) Les boules numérotées de 1 à M sont rouges ($M < N$) et les boules numérotées de $M+1$ à N sont blanches. Soit A_k l'événement {La k-ième boule tirée est rouge}.
i) Calculer $\mathbb{P}(A_k)$. ii) Calculer $\mathbb{P}(A_k \cap A_m)$.

Exercice 2.6. Un oral d'examen se déroule de la façon suivante : n étudiants ont le choix entre n sujets différents. Le premier étudiant choisit un sujet au hasard ; ensuite le second choisit au hasard parmi les $n-1$ sujets restants ; et ainsi de suite, jusqu'au dernier étudiant qui ne peut prendre que le dernier sujet disponible. Vous avez fait l'impasse sur un (et un seul) des sujets. En quelle position devez-vous passer pour avoir un maximum de chances de réussir (c'est-à-dire de ne pas tomber sur le sujet que vous ne connaissez pas) ?

☺ **Exercice 2.7.** *(Formule d'inclusion/exclusion).* Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

a) Montrer que (on pourra utiliser l'Exercice 1.5)

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n} \mathbb{P}\big(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\big).$$

b) n personnes participent à un *père Noël secret* : les noms des n personnes (que l'on suppose tous différents) sont écrits sur des papier, et chaque personne tire au hasard un papier (et le garde) – le nom écrit sur ce papier est celui de la personne à qui elle doit faire un cadeau. On note $p(n)$ la probabilité qu'au moins une personne tire un papier avec son propre nom. Expliciter $p(n)$. Calculer $\lim_{n\to\infty} p(n)$.

⋆ **Exercice 2.8.** Soit Ω un ensemble. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions à valeurs réelles définies sur Ω.

a) Décrire en français et sans utiliser les expressions "quelque soit" ni "il existe" les parties suivantes de Ω
$A = \bigcup_{a\in\mathbb{N}} \bigcup_{b\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq 1} \{\omega \in \Omega\,,\ a \leq X_n(\omega) \leq b\}\,;$
$B = \bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n\geq N} \bigcap_{m\geq n} \{\omega \in \Omega\,,\ X_n(\omega) - X_m(\omega) \geq 0\}\,;$
$C = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{N\geq 1} \bigcup_{n\geq N} \bigcup_{m\geq N} \left\{\omega \in \Omega\,,\ |X_n(\omega) - X_m(\omega)| > \frac{1}{k}\right\}\,.$

b) Faire l'opération de traduction inverse pour les parties suivantes de Ω

	l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que la suite $(X_n(\omega))_{n\geq 1}$...
D	... ne soit pas bornée supérieurement ,
E	... tende vers $+\infty$,
F	... vérifie $\liminf_{n\to+\infty} X_n \leq 1$.

⋆ **Exercice 2.9.** On considère une suite $(A_k)_{k\geq 1}$ d'événements. Montrer que

a) si $\mathbb{P}(A_k) = 0$ pour tout k, alors $\mathbb{P}\big(\bigcup_{k\geq 1} A_k\big) = 0\,;$

b) si $\mathbb{P}(A_k) = 1$ pour tout k, alors $\mathbb{P}\big(\bigcap_{k\geq 1} A_k\big) = 1$.

⋆ **Exercice 2.10.** On effectue des lancers successifs et indépendants d'une pièce qui tombe sur pile avec probabilité p et sur face avec probabilité $1-p$.

a) Proposer un espace des états (*i.e.* Ω) pour décrire cette expérience aléatoire.

b) On note A_n l'événement "Il n'y a que des Face lors des n premiers lancers". Interpréter l'événement $A = \bigcap_n A_n$, et calculer $\mathbb{P}(A)$.

c) On note B_i l'événement "Le $i^{\text{ème}}$ lancer est Pile". Interpréter l'événement $B = \bigcup_{k\geq 1} \bigcap_{i\geq k} B_i$ et B^c, et montrer que $\mathbb{P}(B) = 0$.

Exercice 2.11. On effectue des lancers successifs de dés : pour le n^{e} lancer, on utilise un dé à n faces équiprobables.

a) Proposer un espace des états Ω pour décrire cette expérience (on passera sur $\mathcal{F}$ et $\mathbb{P}$).

b) On note A_n l'événement "le n^{e} dé tombe sur 1". On note $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Interpréter l'événement A et montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$.

c) On note $B = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq k} A_n$. Interpréter l'événement B et montrer que $\mathbb{P}(B) = 1$.

Exercice 2.12. On tire un nombre dans $[0,1]$ uniformément au hasard.

a) Proposer un espace probabilisé (on ne donnera pas $\mathcal{F}$ ici) pour décrire cette expérience aléatoire.

b) Pour $x \in [0,1]$, on note A_x l'événement "le nombre tiré vaut x". Que vaut $\mathbb{P}(A_x)$? Que vaut $\mathbb{P}(\bigcup_{x\in[0,1]} A_x)$?

c) On note B l'événement "le nombre tiré est algébrique". Exprimer l'événement B en fonction des événements A_x, et montrer que $\mathbb{P}(B) = 0$.

d) Un nombre calculable est un réel pour lequel il existe un algorithme (ou une machine de Turing) permettant de donner n'importe quelle décimale de ce nombre. Par exemple, π est un nombre calculable : on peut écrire un programme `pi`, tel que `pi(`n`)` renvoie la $n^{\text{ème}}$ décimale de π. On note C l'événement "le nombre tiré est calculable" : montrer que $\mathbb{P}(C) = 0$. En déduire qu'il existe des nombres non calculables.