Université Pierre et Marie Curie — **Année 2008–2009**
Licence de Mthématiques - LM346

Interrogation écrite N° 1

Exercice 1

Soit Y une variable aléatoire réelle de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad f(y) = \mathbb{I}_{\mathbb{R}_+}(y) 3y^2 e^{-y^3}.$$

a) Soit X une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1. Montrer que Y et $X^{1/3}$ ont la même loi.

b) On dispose d'un ordinateur qui peut produire une suite de variables aléatoires $(U_i)_{i\geq 1}$ indépendantes uniformes sur $[0,1]$. Expliquer comment simuler la variable aléatoire Y.

Exercice 2

Un petit garçon a un gros paquet de bonbons avec 3 parfums : abricot (a), banane (b) et citron (c). Le nombre de bonbons de parfum (i) est noté N_i pour $i = a, b, c$. On pose $N = N_a + N_b + N_c$. Le garçon n'aime pas les bonbons au parfum (a), et pioche (avec remise) "à l'aveugle" dans le paquet. Soit T le nombre de tirages que le garçon a dû faire pour tirer le premier bonbon au parfum (b) ou (c).

a) Quelle est la loi de T ?

b) Quelle est la probabilité que le bonbon tiré au T-ième tirage soit à la banane (parfum (b)) ?

En fait, le garçon ne veut pas manger tout de suite les bonbons. Passionné de statistique, il veut estimer le nombre N_a de bonbons au parfum (a). Il fait n tirages avec remise. On note M_a le nombre (aléatoire) de bonbons au parfum (a).

c) Quelle est la loi de M_a ?

d) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev, Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left| \frac{M_a}{n} - \frac{N_a}{N} \right| > \varepsilon \right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

(On utilisera le fait que pour $p \in [0,1]$, $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$.

e) En déduire un intervalle de confiance de fiabilité à $100 \cdot (1-\alpha)\%$ près pour N_a.

f) Sur le paquet est écrit $N = 100$ bonbons. Combien devrait-il faire de tirages pour avoir une approximation de N_a à 5 unités près, avec une probabilité supérieure à 95% ? (On remarquera qu'il suffit que la largeur de l'intervalle pour N_a soit égale à 10). Conclure.

Exercice 3

Un étudiant veut approximer π à l'aide de la Méthode de Monte-Carlo avec un ordinateur de la manière suivante : à partir d'une suite de variables aléatoires $(U_i)_{i\geq 1}$ indépendantes et uniformes sur $[0,1]$, et de la fonction $g : (x,y) \mapsto \mathbb{I}_{\{x^2+y^2\leq 1\}}$, il construit la suite $(Y_i)_{i\geq 1}$ définie par

$$\forall i \geq 1, \quad Y_i = g(U_{2i-1}, U_{2i}).$$

a) Que vaut $I = \iint_{[0,1]^2} g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$?

b) Rappelez l'énoncé de la loi forte des grands nombres et du théorème central limite.

c) Quelle est la loi de Y_i ? Donner son espérance et sa variance.

d) Donnez à partir de la loi des grands nombres une méthode d'estimation de I à partir des Y_i.

Pour n assez grand, la variable

$$\frac{\sum_{i=1}^n Y_i - nI}{\sqrt{nI(1-I)}}$$

suit approximativement une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

e) Justifiez cette approximation.

f) En utilisant le fait qu'à priori on sait que $0 \leq I \leq 1$ et donc que $I(1-I) \leq \frac{1}{4}$, quel est le nombre n de variables Y_i à simuler pour avoir une approximation à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure à 99% ? (On pourra utiliser le fait que si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\mathbb{P}(|X| \leq 2,6) = 0.99$.)