Université Pierre et Marie Curie — 2013-2014
Probabilités et statistiques - LM345 — Feuille 2 (semaine du 23 au 27 septembre)

Espaces de probabilités.

1. a. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Soit $n \geq 1$. Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements. Montrer que

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right).$$

C'est la formule d'*inclusion-exclusion.*

b. En appliquant cette formule à un espace de probabilités et à des événements bien choisis, calculer le nombre de surjections de $\{1, \dots, p\}$ dans $\{1, \dots, n\}$ pour tous n et p entiers.

2. Dans une grande assemblée, on demande à chaque personne d'écrire son nom sur un bout de papier et de le mettre dans un chapeau. On agite le chapeau puis chacun tire un bout de papier. Quelle est la probabilité que personne ne tire le bout de papier portant son propre nom ?

3. **Paradoxe des anniversaires** Quelle est la probabilité pour que parmi N personnes, au moins 2 aient la même date d'anniversaire ? Pour quelle valeur de N cette probabilité est-elle supérieure à $1/2$? (*On négligera l'existence du 29 février*)

4. On tire deux cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir une paire ? Si l'on n'a pas obtenu une paire, on a le choix entre jeter l'une des deux cartes tirées et en retirer une parmi les 30 restantes, ou jeter les deux cartes tirées et en retirer deux parmi les 30 restantes. Quelle stratégie donne la plus grande probabilité d'avoir une paire à la fin ?

5. On considère un jeu de pile ou face infini. Soit $n \geq 0$ un entier. Calculer la probabilité que le premier temps auquel on obtient pile soit le temps n.

Soit $k \geq 1$ un entier. Calculer la probabilité que le k-ième temps auquel on obtient pile soit le temps n.

Indépendance et probabilités conditionnelles On rappelle la définition de la probabilité de A sachant B pour un événement B de probabilité non nulle :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

6. Que peut-on dire d'un événement qui est indépendant de lui-même ?

7. Faux positifs Une maladie M affecte une personne sur 1000 dans une population donnée. Un test sanguin permet de détecter cette maladie avec une fiabilité de 99% (lorsque cette maladie est effectivement présente). En revanche, pour un individu sain, la probabilité que le test soit positif est de 0.1% (on dit que 0.1% est le taux de faux positifs). Si un test est positif, quelle est la probabilité que l'individu soit réellement malade ?

8. Une généralisation de l'exercice précédent Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(B_i)_{1\leq i\leq n}$ une partition de Ω en n événements de probabilité non nulle. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}$ de probabilité non nulle, et pour tout i,

$$\mathbb{P}(B_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A|B_i)\mathbb{P}(B_i)}.$$

Annexe : ensembles dénombrables

9. On rappelle qu'un ensemble est *dénombrable* s'il peut être mis en bijection avec une partie finie ou infinie de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

a. Montrer qu'un ensemble E est dénombrable si et seulement s'il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$.

b. Montrer qu'un ensemble non vide E est dénombrable si et seulement s'il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur E.

c. Montrer que si E et F sont deux ensembles dénombrables, alors $E \times F$ est dénombrable. Plus généralement, montrer que si $E_1, \ldots, E_n$ sont dénombrables, alors $E_1 \times \ldots \times E_n$ est dénombrable.

d. Montrer que si I est dénombrable et $(E_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles dénombrables, alors $\bigcup_{i\in I} E_i$ est un ensemble dénombrable.

On retiendra qu'un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables et une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables sont dénombrables.

e. Parmi les ensemble suivants, dire lesquels sont dénombrables : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, l'ensemble des suites finies de longueur quelconque de 0 et de 1, l'ensemble des suites infinies de 0 et de 1, l'ensemble des suites finies d'entiers naturels, l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients rationnels.