Université Pierre et Marie Curie — 2011-2012
Probabilités et statistiques - LM345 — Première session – 15 décembre 2011

Examen

Durée : deux heures.
Sans documents ni calculatrices ni téléphones.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires qui prennent respectivement leurs valeurs dans $\{-1, 1\}$ et dans $\{0, 3, 4\}$ et dont la loi jointe est donnée par le tableau ci-dessous.

	$Y = 0$	$Y = 3$	$Y = 4$
$X = -1$	1/8	1/4	0
$X = 1$	1/4	1/4	1/8

Ainsi, par exemple, $\mathbb{P}(X = 1, Y = 3) = \frac{1}{4}$.

a. Calculer la loi de X, c'est-à-dire les nombres $\mathbb{P}(X = -1)$ et $\mathbb{P}(X = 1)$. Calculer la loi de Y, c'est-à-dire les nombres $\mathbb{P}(Y = 0)$, $\mathbb{P}(Y = 3)$ et $\mathbb{P}(Y = 4)$.

b. Calculer l'espérance et la variance de X et Y.

c. Calculer la loi de XY.

d. Calculer la covariance de X et Y.

e. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

2. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire dont la loi admet la densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = ce^{-\frac{x^2}{2} - y}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y),$$

où c est une constante réelle. *On rappelle qu'on a l'égalité* $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}$.

a. Déterminer la valeur de la constante c.

b. Déterminer la densité de la loi de X et la densité de la loi de Y. Si ces lois sont connues, on en donnera le nom.

c. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

d. Calculer la densité de la loi de X^2.

3. On mène une étude sur les préférences gustatives du chat Albert. On cherche à comparer son attrait pour deux types de croquettes différentes, les unes au thon, les autres au saumon. Pendant une semaine, on met à la disposition d'Albert une énorme quantité d'un mélange de croquettes où 40% des croquettes sont au saumon. À la fin de la semaine, on compte qu'il a mangé 340 croquettes, dont 200 au saumon.

a. Énoncer le théorème central limite.

b. Vous semble-t-il plausible qu'Albert n'ait pas de préférence entre les deux types de croquettes ?

On pourra utiliser les égalités approchées

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{1,96} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx \simeq 97,5\% \quad \textit{et} \quad \sqrt{340 \cdot 24} \simeq 90.$$

4. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi exponentielle de paramètre 1.

a. Montrer que la suite $\left(\frac{X_n}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ converge en probabilité vers 0.

b. Montrer que la suite $\left(\frac{X_n}{n^2}\right)_{n \geqslant 1}$ converge dans L^1 vers 0.

c. Que peut-on dire de la suite $\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right)_{n \geqslant 1}$? *Pour appliquer un théorème du cours, on vérifiera explicitement que toutes ses hypothèses sont satisfaites.*

d. Écrire avec les symboles $\cap$ et $\cup$ l'événement

$$A = \text{“pour } n \text{ assez grand, on a l'inégalité } X_n < 2 \log n\text{”}.$$

e. Calculer la probabilité de A.

Barême indicatif.

1. *16 points*
2. *22 points*
3. *16 points*
4. *22 points*