Université Pierre et Marie Curie — 2013-2014
Probabilités et statistiques - LM345 — Mercredi 6 novembre 2013

Contrôle continu.

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.

Exercice 1 Soient X_1, X_2, $\cdots$, X_{2013} des variables aléatoires réelles discrètes. On suppose que pour tout $1 \leq i \leq 2013$,

$$\mathbb{P}(X_i = i^2) = \frac{1}{i+2}, \qquad \mathbb{P}(X_i = -i^2) = \frac{1}{i+2}, \qquad \mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{i}{i+2}\,.$$

On pose $Y := X_1 + \cdots + X_{2013}$. Déterminer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 2 **Vecteur aléatoires discrets...** Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit la loi de Poisson de paramètre λ et Y suit la loi de Poisson de paramètre μ. On rappelle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

a) Donner la loi du couple $Z = (X, Y)$.
b) Donner la loi de $X + Y$.

... et continus Soit $Z = (X, Y)$ un vecteur aléatoire admettant pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{2x^2 - 2xy + y^2}{2}\right).$$

a) On rappelle que la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

$$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Quelle est la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-a)^2} dx$ pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque ?

b) Donner la loi de X.
c) Donner la loi de Y.
d) X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles de densité

$$f_{X,Y}(x,y) = \mathbf{1}_D(x,y)/\pi$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ est le disque unité.

a) Donner la loi de X. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

b) Donner la loi de $R = (X^2 + Y^2)^{1/2}$ (on pourra calculer $\mathbb{P}(R \leq r)$ en utilisant que (X, Y) est de loi uniforme, c'est-à-dire que $\mathbb{P}((X, Y) \in A)$ est proportionnel à l'aire de A).

Solution de l'exercice 1 Les variables aléatoires X_1, X_2, $\cdots$, X_{2013} étant bornées, elles admettent toutes un moment d'ordre 1. Pour tout $1 \leq i \leq 2013$, on a

$$\mathbb{E}(X_i) = i^2 \times \mathbb{P}(X_i = i) + (-i^2) \times \mathbb{P}(X_i = -i) + 0 \times \mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{i^2}{i+2} - \frac{i^2}{i+2} = 0.$$

Par la linéarité de l'espérance, on obtient $\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{2013} \mathbb{E}(X_i) = 0$.

Solution de l'exercice 2 **Première partie**

a) La loi du couple $Z = (X, Y)$ est donnée par pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((X = n) \cap (Y = m)) &= \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = m) \text{ car X et Y sont indépendantes} \\ \mathbb{P}((X = n) \cap (Y = m)) &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{\mu^m}{m!} \end{aligned}$$

b) On retrouve le résultat très rapidement en passant par les fonctions caractéristiques, mais on peut aussi faire le calcul de la loi directement. La variable aléatoire $X + Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc sa loi est donnée par les $\mathbb{P}(X + Y = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + Y = n) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} (X = k) \cap (Y = n - k)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = n - k)) \underset{\text{indep.}}{=} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Y = n - k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\mu} = \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{C_n^k} \lambda^k \mu^{n-k} \\ &\underset{\text{binôme}}{=} \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda + \mu)^n}{n!} \end{aligned}$$

donc $X + Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Deuxième partie.

a) En utilisant que la densité de la loi $\mathcal{N}(a, \frac{1}{2})$ vérifie $\int_{\mathbb{R}} f_{a,\frac{1}{2}}(x)dx = 1$ on a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-a)^2}dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-a)^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

b) Comme le couple Z possède une densité, la marginale possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ qui est donnée par

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(2x^2-2xy+y^2)\right)dy \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(y^2-2xy)\right)dy = \frac{1}{2\pi}e^{-x^2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}[(y-x)^2-x^2]\right)dy \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{2}}dy \end{aligned}$$

Or on a $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{2}}dy = \sqrt{2\pi}$ (par le même argument que la question précédente, en utilisant le fait que la densité de $\mathcal{N}(x,1)$ est d'intégrale 1). Ainsi

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

et X suit la lui normale $\mathcal{N}(0,1)$.

c) De même, Y possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(2x^2-2xy+y^2)\right)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{y^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-(x^2-xy)\right)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{y^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left[\left(x-\frac{y}{2}\right)^2-\frac{y^2}{4}\right]\right)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{y^2}{4}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x-\frac{y}{2}\right)^2}dx}_{\sqrt{\pi}\text{ question a}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}e^{-\frac{y^2}{4}} \end{aligned}$$

donc Y suit la loi normale $\mathcal{N}(0,2)$.

d) Si X et Y étaient indépendantes, on aurait

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = f_X(x)f_Y(y).$$

Or

$$f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\exp\left(-\frac{2x^2+y^2}{4}\right) \neq f(x,y).$$

Donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Solution de l'exercice 3

a) On voit aisément que

$$f_X(x) = \int \mathbf{1}_D(x,y)\frac{1}{\pi}dy = \mathbf{1}_{|x|\le 1}\int \mathbf{1}_{|y|\le\sqrt{x^2-1}}\frac{1}{\pi}dy = \frac{1}{\pi}2\sqrt{1-x^2}\mathbf{1}_{|x|\le 1}.$$

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes puisque $\mathbb{P}(X > \sqrt{3}/2 \cap Y > \sqrt{3}/2) = 0 \neq \mathbb{P}(X > \sqrt{3}/2)\mathbb{P}(Y > \sqrt{3}/2)$.

b) On a $\mathbb{P}(R \le r) = \pi r^2/\pi = r^2$. La variable R a donc pour densité $f_R(r) = 2r\mathbf{1}_{[0,1]}(r)$.