TD10. Loi des grands nombres, théorème central limite

1. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes toutes de loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Que peut-on dire de

$$\frac{f(U_1) + \ldots + f(U_n)}{n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$?

2. On considère une suite de jets indépendants d'un dé équilibré. On désigne par X_k le résultat du k-ème jet et par Y_n le plus grand résultat observé au cours des n premiers jets.

$$Y_n = \max_{1\leq k\leq n} X_k$$

a) Que peut-on dire des propriétés de convergence de la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$?

b) On pose : $N_n = \text{Card}\{k \leq n : X_k = 6\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir la convergence presque sûre de la suite $\left(\frac{N_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. A l'approche des élections, un institut de sondage contacte successivement des individus. Notre modèle est le suivant : les appels sont indépendants et chaque individu répond qu'il va voter pour le candidat A avec probabilité p_A (et pour le candidat B avec probabilité $p_B = 1 - p_A$). Le but est d'*estimer* le paramètre p_A du modèle.

a) Soit $N_A(n)$ le nombre de réponses en faveur du candidat A collectées en n appels. Que dire de la convergence de la suite $\frac{N_A(n)}{n}$?

b) L'application de l'inégalité de Tchebychev à la variable aléatoire $\frac{N_A(n)}{n}$ permet-elle de retrouver ce résultat ?

c) Déduire de cette même inégalité un intervalle $I(n,\delta)$ tel que

$$\mathbb{P}\left(p_A \in I(n,\delta)\right) \geq 1 - \delta$$

Un tel intervalle est appelé *intervalle de confiance* pour le paramètre p_A.

4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \geq 0$, on définit la fonction $b_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par la formule

$$\forall x \in [0,1],\ b_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

a. Montrer que la suite de fonctions $(b_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f, c'est-à-dire

$$\forall x \in [0,1],\ \lim_{n\to\infty} b_n(x) = f(x).$$

b. Montrer que la convergence est uniforme, c'est-à-dire que

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|b_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} = 0.$$

On a démontré le *théorème de Stone-Weierstrass* : toute fonction continue sur un segment y est uniformément approximable par une suite de fonctions polynômiales. Plus précisément on a approximé f par une famille de *polynômes de Bernstein.*

5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre 1. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

a) Rappeler la loi de S_n. Que vaut $\mathbb{P}(S_n \leq n)$?

b) En utilisant le théorème central limite, calculer la limite de la suite $\left(e^{-n}\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}\right)_{n\geq 1}$.

6. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

a) Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_{2n+1} - X_{2n}$. Montrer que la suite

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \cdots + Y_n)\,,$$

converge en loi et trouver la loi limite.

b) On définit maintenant la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ par $Z_n = (X_1X_2\cdots X_n)^{1/n}$. La suite (Z_n) converge-t-elle ? En quel sens ? Préciser sa limite.

7.

a) Soit $(p_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels dans $]0,1[$ telle que $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda > 0$. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. telles que pour tout n : $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ et X une v.a. de loi de Poisson paramètre λ. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers X.

b) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. Etudier le comportement asymptotique en loi de la suite $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt{k}X_k$

8. On suppose que l'intervalle de temps entre deux voitures successives à un passage à niveau (peu fréquenté) suit une loi exponentielle de moyenne 30 minutes. On suppose de plus qu'il y a indépendance entre les intervalles de temps séparant les instants de passage de voitures. Calculer (une valeur approchée) de la probabilité qu'il y ait plus de 50 voitures qui empruntent le passage à niveau une journée donnée.

9. Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées et de carré intégrable. On suppose que leur loi a la propriété suivante : $X_1 + X_2$ a même loi que $\sqrt{2}X_1$.

a) Exprimer, pour tout $n \geq 0$, la loi de $X_1 + \ldots + X_{2^n}$ en fonction de celle de X_1.

b) Déterminer la loi commune des variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$.