MAT 431 2011-2012
Equations différentielles et systèmes dynamiques

Feuille d'exercices numéro 5

Sous-variétés, champs de vecteurs sur les sous-variétés, hyperbolicité

Exercice 1. Montrer que la sphère unité $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ est une sous-variété en donnant une carte au voisinage de chacun de ses points.

Exercice 2. a) L'ensemble $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^3 + zx + y = 0\}$ est-il une sous-variété ?
b) Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1 \text{ et } x^4 + y^4 + z^4 = r\}$. Pour quelles valeurs de r est-ce une sous-variété ? Quelle est alors sa dimension ?

Exercice 3. Démontrer que $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^4 - x^4 = 0\}$ n'est pas une sous-variété. Même question pour les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ définis respectivement par les équations
(i) $y^2 - x^4 = 0$
(ii) $y^3 - x^2 = 0$.

Exercice 4. a) On note $G_1 = SL(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ réelles de déterminant 1. Montrer que G_1 est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n^2}$, de dimension $n^2 - 1$ et déterminer son espace vectoriel tangent en tout point.
b) Mêmes questions avec $G_2 = O(n)$, l'ensemble des matrices orthogonales $n \times n$, la dimension étant alors $n(n-1)/2$.

Exercice 5. a) Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n - M$. Caractériser les points critiques de la fonction

$$F : M \to \mathbb{R}^n, \quad p \mapsto \|a - p\|^2$$

en fonction des espaces tangents $T_x M$.
b) Calculer la distance de $(0, 0, 0)$ à la surface $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1\}$.

Exercice 6. Soit A une matrice symétrique réelle $n \times n$. Caractériser les vecteurs réalisant le max sur la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\langle x, Ax \rangle$. En déduire que A a une valeur propre réelle.

Exercice 7. L'espace $E = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel. On note $f(v_1, \ldots, v_n)$ le déterminant de la matrice $n \times n$ de vecteurs colonnes $v_1, \ldots, v_n \in E$.

(a) Montrer que le maximum de f sur l'ensemble X défini par

$$\|v_1\| = \cdots = \|v_n\| = 1,$$

est atteint et strictement positif.

(b) Montrer par le théorème des extrema liés, que si le maximum de f est atteint en $(v_1, \ldots, v_n)$, les v_i forment une base orthonormale de E.

(c) En déduire l'inégalité de Hadamard

$$|\det(v_1, \ldots, v_n)| \leq \|v_1\| \cdots \|v_n\|,$$

pour tous vecteurs $v_1, \ldots, v_n$. Quand a-t-on égalité ?

Exercice 8. Soit M une sous-variété connexe, compacte de dimension 2 de l'espace euclidien de dimension 3 ($i.e$ une surface fermée de $\mathbb{R}^3$). On note $\|\cdot\|$ la norme canonique de l'espace $\mathbb{R}^3$ (on prendra garde au fait que cette norme n'est pas partout différentiable).

(a) Montrer que le plan tangent à $M^2 = M \times M \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$ est donné par $T_{(u_1,u_2)}M^2 = T_{u_1}M \times T_{u_2}M$.

(b) Montrer que l'application $d_2 : (u_1, u_2) \mapsto \|u_1 - u_2\|$ de M^2 dans $\mathbb{R}$ atteint son maximum en un point où $u_1 \neq u_2$ et où les plans tangents en u_1 et u_2 sont orthogonaux à $u_1 - u_2$.

(c) Montrer que l'application $d_3 : (u_1, u_2, u_3) \mapsto \|u_1 - u_2\| + \|u_2 - u_3\| + \|u_3 - u_1\|$ de M^3 dans $\mathbb{R}$ atteint son maximum en un point (u_1, u_2, u_3) tel que $u_i \neq u_j$ pour $i \neq j$ et qu'en un tel point

$$\frac{u_1 - u_2}{\|u_1 - u_2\|} - \frac{u_2 - u_3}{\|u_2 - u_3\|}$$

est orthogonal au plan tangent en u_2 (et de même après permutation circulaire des indices).

(d) En déduire qu'il existe des trajectoires fermées à trois rebonds sur toute surface bordant un convexe. Que dire pour k rebonds ($k > 3$).

Exercice 9 Soient $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, $E \in \mathbb{R}$.

(a) Démontrer que si $DF(x)$ est non nulle pour tout $x \in F^{-1}(E)$, l'ensemble $F^{-1}(E)$ est une sous-variété de dimension 1.

(b) Démontrer que si X est un champ de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ ne s'annulant en aucun point (de classe C^∞) tel que $DF(x) \cdot X(x) = 0$ alors $F(x(t))$ est constante si $x(\cdot)$ est solution de $\dot{x} = X(x)$.

(c) Sous les hypothèses de (b), démontrer que si $F^{-1}(E)$ est compact, connexe c'est une orbite périodique de X.

Exercice 10 : Mouvement libre du corps solide On se propose d'étudier dans cet exercice le mouvement d'un corps solide qui n'est soumis à aucune force extérieure.

1) La position d'un solide (à translation près) est décrite par une matrice $R(t) \in SO(3)$ (l'ensemble des matrices à coefficients réels, 3×3, orthogonales de déterminant 1). Son mouvement est donc décrit par $R : \mathbb{R} \to SO(3)$, $t \mapsto R(t)$. On peut en outre supposer que $R(0) = Id$.

Démontrer que $R'(t)R(t)^{-1}$ est dans $so(3)$, l'ensemble des matrices 3×3 à coefficients réels, anti-symétriques, de trace nulle.

2) Démontrer que si $\omega \in \mathbb{R}^3$, l'application $\mathcal{A}(\omega) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui à $v \in \mathbb{R}^3$ associe $\omega \wedge v$ est une application linéaire anti-symétrique de trace nulle. Démontrer que l'application $\mathbb{R}^3 \to so(3)$ qui à $\omega \mapsto \mathcal{A}(\omega)$ est un isomorphisme.

On définit $\Omega(t) = R'(t)R(t)^{-1}$ et $\omega(t)$ l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que $\Omega(t) = \mathcal{A}(\omega(t))$. On appelle $\omega(t)$ le vecteur de *rotation instantané* du corps au temps t.

3) On démontre en mécanique que : (a) le moment cinétique $\sigma(t) \in \mathbb{R}^3$ d'un corps solide est de la forme

$$\sigma(t) = J(t)\omega(t)$$

où : (b) $J(t)$ est une matrice symétrique définie positive 3×3 à coefficients réels qui est de la forme $J(t) = R(t)J(0)R(t)^{-1}$. La matrice $I = J(0)$ est *l'opérateur d'inertie* (dans le référentiel lié au solide) .

On définit $\pi(t) = R(t)^{-1}\sigma(t)$, le moment cinétique *dans le référentiel du solide*. En utilisant la conservation du moment cinétique $\sigma(\cdot)$ au cours du temps, démontrer que $\pi(t)$ vérifie *l'équation d'Euler*

$$\dot{\pi}(t) = \pi(t) \wedge (I^{-1}\pi(t)).$$

4) Pour $\pi \in \mathbb{R}^3$, on note $F(\pi) = (1/2)\|\pi\|^2$ et $G(\pi) = (1/2)\|I^{-1/2}\pi\|^2$, où $I^{-1/2}$ est l'unique matrice symétrique définie positive dont le carré vaut I^{-1}.

Démontrer que si $\pi(\cdot)$ est solution de l'équation d'Euler, les quantités $F(\pi(t))$ et $G(\pi(t))$ sont constantes au cours du mouvement.

5) On suppose que les valeurs propres de I sont distinctes deux à deux. Notons $\mathcal{S}_{F_0}$ et $\mathcal{G}_{G_0}$ les ensembles $F^{-1}(F_0)$ et $G^{-1}(G_0)$. On suppose F_0 fixée.

5.a) A quelle condition sur G_0, l'ensemble $\mathcal{S}_{F_0} \cap \mathcal{G}_{G_0}$ est-il une sous-variété de dimension 1 ?

5.b) Démontrer que dans ce cas, $\mathcal{S}_{F_0} \cap \mathcal{G}_{G_0}$ coïncide avec une orbite périodique de $\pi(t)$ (cf. Ex. 9).

5.c) En déduire que pour presque toute condition initiale $\pi(0)$ la solution $\pi(\cdot)$ de l'équation d'Euler est périodique.

5.d) Tracer le portrait de phase du champ de vecteurs défini par l'équation d'Euler restreint à $\mathcal{S}_{F_0}$. Quel est le comportement de $\pi(\cdot)$ pour les autres conditions initiales ?

6) 6.a) Démontrer que si on définit $\tilde{\Omega}(t) = R^{-1}(t)\Omega(t)R(t)$ et $\tilde{\omega}(t) = \mathcal{A}^{-1}(\tilde{\Omega}(t))$, on a $\pi(t) = I\tilde{\omega}(t)$ et $R^{-1}(t)R'(t) = \tilde{\Omega}(t)$.

6.b) On suppose dans la suite que $\tilde{\Omega}(\cdot)$ est T-périodique. En utilisant le théorème de Floquet (version dans $SO(3)$) démontrer qu'il existe $U(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}, SO(3))$, de la forme $U(t) = P(t)e^{tB}$, avec $P \in C^\infty(\mathbb{R}, SO(3))$ qui est T-périodique et $B \in so(3)$ telles que $U'(t) = -\tilde{\Omega}(t)U(t)$ et $U(0) = Id$.

6.c) On suppose que $R(0) = Id$. Montrer (sous les hypothèses de 6.b) que $R(t) = U(t)^{-1}$. [On trouvera une équation différentielle satisfaite par UR]

7) Déduire de la question précédente que pour presque toute condition initiale, le mouvement du solide **dans l'espace** est quasi-périodique à deux fréquences, c'est-à-dire que les coordonnées de $R(t)$ sont de la forme $f(\omega_1 t, \omega_2 t)$ [1] où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction $\mathbb{Z}^2$-périodique ($f(x+k, y+l) = f(x,y)$ pour tous $k, l \in \mathbb{Z}$).

Exercice 11 On considère l'équation différentielle dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x' &= y + \sin(x^2 y) \\ y' &= x + \sin(xy^2) \end{cases}$$

et on note ϕ^t son flot.

1) Expliquer rapidement pourquoi le flot est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2) Démontrer que 0 est un point fixe hyperbolique.

3) Que peut-on dire de l'ensemble des (x, y) dans un voisinage de 0 tels que $\phi^t(x, y)$ tend vers 0 quand t tend vers $\pm\infty$?

4) On dit qu'une orbite $(\phi^t(x_0, y_0))_{t\in\mathbb{R}}$ est un *pétale* (du portrait de phase) si $\lim_{t\to\infty} \phi^t(x_0, y_0) = \lim_{t\to-\infty} \phi^t(x_0, y_0) = 0$. Démontrer que le nombre de pétales distincts est inférieur ou égal à 2.

Exercice 12 Soit $X(x, y)$ un champ de vecteurs C^∞ défini sur $\mathbb{R}^2$ tout entier de la forme $X(x, y) = (y + a(x, y), x + b(x, y))$ où $a, b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont bornées et vérifient $a(0) = b(0) = 0$, $Da(0) = Db(0) = 0$.

2.1. Démontrer que le flot ϕ_X^t de X est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2.2. Démontrer que $(0, 0)$ est un point fixe hyperbolique.

2.3. Démontrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que le disque $B(0, \epsilon)$ de centre 0 et de rayon ϵ ne contient aucune orbite périodique.

1. $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ dépendent de la condition initiale.

2.4. On suppose qu'il existe une suite de points périodiques $p_n = (x_n, y_n) \neq (0,0)$ de période T_n tels que p_n converge vers 0. Démontrer que T_n tend vers l'infini.