Université Paris 6– M2 Equations de Schrödinger quasi-périodiques II - Examen du 26 mai 2011 - Durée 3h

Notations On note pour $E \in \mathbb{C}$ et $V : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ continue, $S_{E,V} = \begin{pmatrix} E - V(\cdot) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Pour $\alpha \in \mathbb{T}^d$ (dont les coordonnées sont rationnellement indépendantes) on note $(\alpha, S_{E,V})$ le cocycle $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}^2 \circlearrowleft$, $(x, y) \mapsto (x + \alpha, S_{E,V}(x)y)$, $\rho(\alpha, S_{E,V})$ son nombre de rotation fibré (quand $E \in \mathbb{R}$) et $L(\alpha, S_{E,V})$ son exposant de Lyapunov. Pour $x \in \mathbb{T}^d$, on note $H_{x,V}$ l'opérateur de Schrödinger quasi-périodique sur $l^2(\mathbb{Z})$ défini par : $u \in l^2(\mathbb{Z})$,

$$(H_{x,V}u)_n = u_{n+1} + u_{n-1} + V(x + n\alpha)u_n.$$

Nous noterons $\mu^0_{x,V}$ la mesure spectrale de $H_{x,V}$ associée à $e_0 \in l^2(\mathbb{Z})$ ($e_0(k) = \delta_{0k}$) définie par

$$\langle (H - z)^{-1}e_0, e_0\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu^0_{x,V}(E)}{E - z}$$

et ν_V la densité intégrée d'états $\nu_V = \int_{\mathbb{T}^d} \mu^0_{x,V}dx$.

Exercice 1

1) On suppose $V \equiv 0$. Calculer $\mu^0_{x,0}$, $\rho(\alpha, S_{E,0})$, $L(\alpha, S_{E,0})$ et $\nu_{V\equiv 0}$.

2) Supposons que pour $V_1, V_2 : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$, continues on ait pour tout $E \in \mathbb{R}$

$$\rho(\alpha, S_{E,V_1}) = \rho(\alpha, S_{E,V_2}).$$

2.a) Expliquer pourquoi les densités intégrées d'états ν_{V_1} et ν_{V_2} sont égales.

2.b)Démontrer que $L(\alpha, S_{E,V_1}) = L(\alpha, S_{E,V_2})$ pour tout $E \in \mathbb{R}$.

3) On suppose $V : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ continue.

3.a) Démontrer que $\langle H_{x,V}e_0, e_0\rangle = V(x)$ et calculer de même $\langle H^2_{x,V}e_0, e_0\rangle$.

3.b) En déduire que $2 + \int_{\mathbb{T}^d} V(x)^2dx = \int_{\mathbb{R}} E^2d\nu_V(E)$.

4) On suppose à présent que $V : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$ est tel que pour tout $E \in \mathbb{R}$

$$\rho(\alpha, S_{E,V}) = r_0(E) := \rho(\alpha, S_{E,0}).$$

Démontrer que $V \equiv 0$.

Exercice 2 Soit $h > 0$ et $F \in C^\omega_h(\mathbb{T}^d, sl(2, \mathbb{R}))$ (on rappelle que cela signifie que F est holomorphe sur un h-voisinage complexe de $\mathbb{T}^d$ et que pour tout $x \in \mathbb{T}^d$, $F(x)$ est dans l'algèbre de Lie $sl(2, \mathbb{R})$ des matrices réelles 2×2 à coefficient réels et de trace nulle). Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on note

$$R_{2\pi\theta} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\theta) & -\sin(2\pi\theta) \\ \sin(2\pi\theta) & \cos(2\pi\theta) \end{pmatrix}.$$

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un homéomorphisme croissant et notons et $A_{\theta,\epsilon}(\cdot) = R_{2\pi g(\theta)} e^{\epsilon F(\cdot)}$.

On suppose que $\alpha \in \mathbb{T}^d$ est dans l'ensemble diophantien $CD(\gamma, \sigma)$ c'est-à-dire que

$$\forall\ k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\},\ \min_{l \in \mathbb{Z}} |\langle k, \alpha\rangle - l| \geq \frac{\gamma}{|k|^\sigma}.$$

Démontrer que pour tout $\delta > 0$, il existe un $\epsilon^*(\delta)$ tel que pour tout $|\epsilon| < \epsilon^*(\delta)$ il existe, dans chaque intervalle de taille δ un θ pour lequel $(\alpha, A_{\theta,\epsilon})$ est réductible, conjugué (en classe analytique) à une matrice elliptique constante.

Exercice 3 On suppose dans la suite que $\alpha \in \mathbb{T}^d$ vérifie une condition diophantienne $CD(\gamma, \sigma)$ et on considère l'opérateur de Schrödinger avec pour potentiel $V(x) = \lambda \cos(x)$ (la forme de V n'intervient qu'à partir de la question 5).

1) Démontrer que s'il existe $v \in C^\omega_h(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ tel que

$$v(x + \alpha) = S_{E,\lambda\cos}(x)v(x),$$

il est possible de trouver $Z \in C^\omega_{h'}(\mathbb{T}^d, SL(2, \mathbb{R}))$ telle que

$$Z(\cdot + \alpha)S_{E,\lambda\cos}(\cdot)Z(\cdot)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où γ est une constante.

2) Pour $\mu \in \mathbb{R}$, calculer $Z(\cdot + \alpha)S_{E+\mu,\lambda\cos}(\cdot)Z(\cdot)^{-1} = U_\mu(\cdot)$ et vérifier que $\mathrm{tr}(\int_{\mathbb{T}^d}(U_\mu(x)dx) = 2 - \gamma\mu \int_{\mathbb{T}^d}(Z_{22}(x))^2 dx$.

3) Démontrer qu'il existe ϵ^* et $\tilde{h} < h'$ tels que pour tout $|\mu| < \epsilon^*$ il existe $B \in C^\omega_{\tilde{h}}(\mathbb{T}^d, SL(2, \mathbb{R}))$ telle que sur la bande de taille $\tilde{h}$, $B(\cdot{+}\alpha)U_\mu(\cdot)B(\cdot)^{-1} = V_\mu + O(\mu^2)$ où $V_\mu = \int_{\mathbb{T}^d}(U_\mu(x)dx$. [On résoudra une équation linéarisée dans $sl(2, \mathbb{R})$.]

4) En déduire que si $\gamma \neq 0$, disons strictement positif, pour $-\mu > 0$ suffisamment petit le cocycle $(\alpha, S_{E+\mu,\lambda\cos})$ est uniformément hyperbolique.

5) On suppose à présent que $V = \lambda\cos$. On a vu en cours que $\mathrm{Spec}(H_{x,\lambda\cos}) = (\lambda/2)\mathrm{Spec}(H_{x,(4/\lambda)\cos})$ (on rappelle que le spectre est indépendant de x).

5.a) Supposons que $(2/\lambda)E$ soit une *valeur propre localisée* de $H_{0,(4/\lambda)\cos}$ c'est-à-dire qu'il existe $u \in l^2(\mathbb{Z})$ solution de

$$u_{n+1} + u_{n-1} + (4/\lambda)\cos(n\alpha)u_n = (2/\lambda)Eu_n$$

et vérifiant pour des constantes $\nu > 0$ et $C > 0$

$$|u_n| \leq Ce^{-\nu|n|}.$$

Démontrer qu'alors $E \in \mathrm{Spec}(H_{\lambda\cos})$ et qu'il existe v comme dans la question 1).

5.b) Démontrer que la constante γ dans la question 2) est non-nulle. [On pourra démontrer qu'il ne peut exister deux solutions linéairement indépendantes à l'équation de la question 1) ; pour cela on démontrera que l'équation $H_{0,(4/\lambda)\cos} u = (2/\lambda)Eu$ ne peut admettre deux solutions dans $l^2(\mathbb{Z})$ linéairement indépendantes.]

5.c) Démontrer que sous l'hypothèse de 5.a) cela implique que $E \in \mathrm{Spec}(H_{0,\lambda\cos})$ appartient au bord du spectre.

Remarque On peut démontrer que pour $\lambda > 2$, le spectre de $H_{0,\lambda\cos}$ est purement ponctuel avec des fonctions propres décroissant exponentiellement vite (c'est un théorème dû à S. Jitomirskaya). Le résultat précédent (qui est dû à J. Puig) montre que pour $\lambda \neq 0, 2$ le spectre de l'opérateur presque-Mathieu ($V = \lambda\cos$) est un ensemble de Cantor.

Exercice(facultatif) Soient $V \in C^0(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{T}^d$ dont les composantes sont rationnellement indépendantes. Démontrer que l'exposant de Lyapunov $E \mapsto L(\alpha, S_{E,V})$ est concave dans les trous spectraux (toute composante connexe du complémentaire du spectre).