

PROGRAMME DE COLLES  
SEMAINE 17 (DU 15/2 AU 19/2)

**Séries entières**

- Rappel sur les formules de Taylor.
- Lemme d'Abel et rayon de convergence. Critère de d'Alembert. Lien entre rayons de convergence et relations de comparaison. Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.
- Propriétés de la somme d'une série entière. Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence. Théorème (hors-programme) de convergence radiale d'Abel. La somme d'une série entière est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme. Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme. Extension au cas complexe :  $\mathbb{C}$ -dérivabilité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence. Primitivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.
- Complément (hors-programme) sur les formules de Cauchy : si  $\sum a_n z^n$  est une série entière de rayon de convergence  $R_a \neq 0$  et de somme  $S_a$ , alors pour tout  $r \in ]0, R_a[$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} S_a(r e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$ .
- Exponentielle complexe.
- Développement en série entière sur un intervalle  $] -r, r[$  de  $\mathbb{R}$ . Série de Taylor d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un intervalle  $] -r, r[$ . Développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arctan,  $x \mapsto \ln(1+x)$  et  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  (où  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ ).
- Principe du zéro isolé (hors-programme)<sup>1</sup>. On a évoqué le théorème de Cauchy linéaire (existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy), bien pratique pour résoudre de nombreux exercices<sup>2</sup>.
- Techniques pour calculer la somme de séries entières bien particulières.
- Techniques pour étudier le comportement asymptotique de la somme de certaines séries entières.
- Étude d'un exemple de série génératrice.

**Prévisions pour la semaine 18**

Intégrales à paramètres. Révision de toute l'intégration.

---

1. mais le principe des zéros isolés n'a pas été établi : l'analyticité de la somme d'une série entière de rayon non nul n'a pas été vue  
2. ce théorème sera bien sûr vu en détail lors du chapitre sur les équations différentielles linéaires