Lycée Condorcet **2015-2016**
MPSI2

À remettre jeudi 10 septembre

DM 1

Exercice 1

Soit E, F et G des ensembles et $u : E \longrightarrow F$ et $v : F \longrightarrow G$ des applications.

1. Montrer que si $v \circ u$ est injective et si u est surjective, alors v est injective.
2. Montrer que si $v \circ u$ est surjective et si v est injective, alors u est surjective.

Exercice 2

Résoudre les deux équations suivantes, d'inconnues $x \in [-2, +\infty[$.

$$(E_1) : \sqrt{x+4} - \sqrt{x+2} = 1, \qquad (E_2) : \sqrt{x+4} + \sqrt{x+2} = 1.$$

Exercice 3

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} \leqslant \dfrac{4n+3}{6}\sqrt{n}$.

Exercice 4

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des fonctions f définies et dérivables sur $]0, +\infty[$ telles que :

$$(*) \qquad \forall\, x \in \,]0, +\infty[, \quad x\, \ln(x)\, f'(x) = 1 + f(x).$$

On va procéder par analyse/synthèse.

1. **Analyse.** Prenons une fonction f définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ vérifiant $(*)$.
   On définit la fonction u sur $]0, 1[$ par : pour tout $x \in \,]0, 1[$, on pose
   $$u(x) = \frac{f(x)}{\ln(x)}.$$
   (a) Montrer que u est dérivable et calculer u'. En déduire, pour tout $x \in \,]0, 1[$, une expression de $u(x)$.
   (b) Donner, pour tout $x \in \,]0, 1[$, une expression de $f(x)$, puis, pour tout $x \in \,]0, 1]$, une expression de $f(x)$.
   (c) À l'aide de la fonction v définie sur $]1, +\infty[$ par :
   $$\forall\, x \in \,]1, +\infty[, \quad v(x) = \frac{f(x)}{\ln(x)},$$
   donner, pour tout $x \in [1, +\infty[$, une expression de $f(x)$.
   (d) En calculant $f'(1)$ de deux manières, montrer qu'il existe un réel a tel que pour tout $x > 0$, on a :
   $$f(x) = a\, \ln(x) - 1.$$
2. **Synthèse.** Faire la synthèse.
3. **Conclusion.** Conclure.

Exercice 5

Soit E, F, G et H des ensembles et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$ des applications. On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives.

1. Montrer que g est bijective.
2. Montrer que f et h sont aussi bijectives.