I. Vecteurs gaussiens

I.1. **Exercice.** Expliciter la fonction caractéristique de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ calculer $\mathrm{E}(X^k)$, $k \in \mathbb{N}$.

I.2. **Exercice.** Soit X et Y deux variables aléatoires réelles. On suppose que X et Y sont indépendantes et que la loi du vecteur aléatoire (X,Y) est invariante par les rotations de centre $(0,0)$.

(1) Montrer que $X \overset{\mathscr{L}}{=} Y$ et $X \overset{\mathscr{L}}{=} -X$.
(2) On note φ la fonction caractéristique de X. Montrer que

$$\varphi(u)\varphi(v) = \varphi\big(\sqrt{u^2+v^2}\big) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

(3) Conclure.

I.3. **Exercice.** Soit Y un vecteur gaussien de dimension n de matrice de covariance V et de moyenne $m \in \mathbb{R}^n$. Expliciter la fonction caractéristique de Y.

I.4. **Exercice*.** (Méthode de Box-Muller ou des coordonnées polaires) Soient (U_1, U_2) une variable uniforme sur $[0,1] \times [0,1]$. On pose

$$Y_1 = \sqrt{-2\log U_1} \cdot \cos(2\pi U_2), \quad Y_2 = \sqrt{-2\log U_1} \cdot \sin(2\pi U_2).$$

(1) Quelle est la loi de $Y_1^2 + Y_2^2$? et de Y_2/Y_1 ?
(2) Montrer que le couple (Y_1, Y_2) est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance l'identité.

I.5. **Exercice.** Soit Y un vecteur gaussien de dimension n, centré et de matrice de covariance $\sigma^2 I_n$. Quelle est la loi de AY si A est une matrice orthogonale?

I.6. **Exercice.** Soit Y un vecteur gaussien de dimension n dont la matrice de covariance $V = \begin{pmatrix} V_1 & & & \\ & V_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & V_k \end{pmatrix}$ est diagonale par blocs, où V_i est $\ell_i \times \ell_i$. Démontrer que les vecteurs

$$Z_1 = (Y_1, \ldots, Y_{\ell_1}),\ Z_2 = (Y_{\ell_1+1}, \ldots, Y_{\ell_1+\ell_2}), \ldots, Z_k = (Y_{\ell_1+\cdots+\ell_{k-1}+1}, \ldots, Y_n)$$

sont indépendants.

I.7. **Exercice.** Soit X un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de carré intégrable et de matrice de covariance K. Soient T_1 (resp. T_2) une application linéaire de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^{d_1}$ (resp. $\mathbb{R}^{d_2}$).

(1) Expliciter la matrice de covariance du vecteur aléatoire $\begin{pmatrix} T_1 X \\ T_2 X \end{pmatrix}$.
(2) Dans le cas où X est gaussien, montrer les vecteurs aléatoires $T_1 X$ et $T_2 X$ sont indépendants si et seulement si $T_1 K T_2^\star = 0$.

I.8. **Exercice.** Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $a > 0$. On pose

$$Y^a := X\,1_{\{|X| < a\}} - X\,1_{\{|X| \geq a\}}.$$

Montrer que Y^a est une v.a.r. gaussienne.
Montrer qu'il existe $b > 0$ tel que

$$\int_0^b x^2 e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{4}.$$

Calculer la covariance de X et Y^b. Le couple (X, Y^b) forme-t-il un vecteur gaussien ?

I.9. **Exercice.** Soit X une variable aléatoire gaussienne centrée réduite et Y une variable aléatoire indépendante de X, ne prenant que les valeurs -1 et 1 avec $P\{Y = 1\} = p$, $0 < p < 1$. On pose $Z = X \cdot Y$.

(1) Quelle est la loi de Z ? Le couple (X, Z) est-il gaussien ?
(2) Montrer que pour tout $p \in [0,1]$, X et Z ne sont pas indépendantes. Montrer cependant que pour p bien choisi $\mathrm{Cov}(X, Z) = 0$.

I.10. **Exercice.** Soit (X, Y) un vecteur gaussien de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ où $\rho \in [0,1]$. Montrer que $X+Y$et $X-Y$ sont deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes.

I.11. **Exercice*.** Soient X_1et X_2 deux variables aléatoires indépendantes $\mathcal{N}(0,\sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(0,\sigma_2^2)$. Montrer que $(X_1+X_2)^2$ et $(X_1-X_2)^2$ sont indépendantes si et seulement si ils sont non-corrélés.

I.12. **Exercice.** Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien de matrice de covariance : $V = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et d'espérance $(1,1,0)$.

(1) Déterminer le noyau de la matrice V et en déduire que, presque-sûrement : $X_2 - X_3 = 1$.
(2) Le vecteur (X_1, X_2) admet-il une densité dans $\mathbb{R}^2$? si oui, l'expliciter.
(3) Quel est le support dans $\mathbb{R}^3$ de la loi de X ?

I.13. **Exercice*.** Soient X une variable aléatoire gaussienne centrée réduite, indépendante de la suite de variables aléatoires (Y_n) où Y_n suit la loi $\chi^2(n)$. On pose $T_n = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y_n}{n}}}$.

(1) Montrer que la densité t_n de T_n est donnée par

$$t_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((k+1)/2)}{\sqrt{k}\,\Gamma(k/2)} \frac{1}{(1+t^2/k)^{(k+1)/2}}.$$

(2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} t_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On pourra tout d'abord montrer que $\Gamma(a+1/2)/\Gamma(a) \sim \sqrt{a}$ quand $a \to \infty$ en remarquant que $\Gamma(a+1/2)/\Gamma(a) = E[\sqrt{U}]$ où U suit une loi $Gamma(a,1)$.

(3) Montrer que (T_n) converge en loi et identifier sa limite.

I.14. Exercice. Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur gaussien sur $\mathbb{R}^d$ centré, de matrice de covariance inversible K. Quelle est la loi de $\sum_{i,j=1}^d (K^{-1})_{ij} X_i X_j$?

I.15. Exercice. Soit $V_1, V_2, \dots, V_d$ des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ deux à deux orthogonaux et soit $X \sim \mathcal{N}(0, I_n)$ un vecteur gaussien standard de dimension n. Pour $i = 1, \dots, d$ on considère une base orthonormale $(e_{i,1}, \dots, e_{i,\ell_i})$ de V_i et on note Y_i la projection orthogonale de X sur V_i.

(1) Montrer que les variables $\xi_{i,k} := \langle e_{i,k}, X \rangle$, $1 \le i \le d$, $1 \le k \le \ell_i$, sont des gaussiennes standards indépendantes.
(2) Exprimer Y_i en fonction des $\xi_{i,k}$ et des $e_{i,k}$.
(3) En déduire que les vecteurs $Y_1, \dots, Y_d$ sont indépendants et expliciter la loi de $\|Y_i\|^2$.

I.16. Exercice. Soient $X_1, \dots, X_n \sim_{i.i.d} \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On pose

$$\bar{X}_n := n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i \ \text{ et } \ R_n := \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2.$$

1) Déterminer la loi du couple $(\bar{X}_n, R_n)$.
2) Montrer que $\bar{X}_n$ et $(\max_{1\le i\le n} X_i - \min_{1\le i\le n} X_i)$ sont indépendants.

I.17. Exercice. Soit (X_1, X_2) un vecteur gaussien centré de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ où $|\rho| < 1$. On pose

$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 + X_2),$$
$$Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2).$$

(1) Calculer la matrice de covariance de (Y_1, Y_2). Quelle est la loi jointe de (Y_1, Y_2) ? Les variables Y_1 et Y_2 sont-elles indépendantes?
(2) Quelle est la loi de X_1 ? Quelle est celle de Y_1 ? Déduire de $\mathrm{E}\{X_1^4\}$ le moment d'ordre 4 de Y_1 puis calculer $\mathrm{E}\{X_1^2 X_2^2\}$.
(3) On pose $Z = X_1/X_2$. Calculer la loi de Z puis en déduire sans calcul celle de $1/Z$.
(4) Montrer que si X suit une loi de Cauchy (de densité $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$) alors $1/X$ suit également une loi de Cauchy.