Feuille d'exercices 3

1. Lien entre inégalité de Poincaré et inégalité de Sobolev logarithmique

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$. On dit que μ satisfait une inégalité de Poincaré avec constante $c > 0$ si pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dans une classe de fonctions $\mathcal{C}$ assez grande (disons ici, et dans toute cette feuille, que $\mathcal{C}$ est la classe des fonctions $\mathcal{C}^2$ et à support compact), on a

$$\mathbf{Var}_\mu(f) \leq c\mathcal{E}_\mu(f)\,,$$

où $\mathcal{E}_\mu(f) = \mathbf{E}_\mu\left[\|\nabla f\|^2\right]$ est l'énergie de f sous μ. La constante de Poincaré de μ est définie comme

$$c_{\mathrm{P}}(\mu) = \inf\left\{\frac{\mathbf{Var}_\mu(f)}{\mathcal{E}_\mu(f)}\,,\ f \in \mathcal{C}\,,\ \mathbf{Var}_\mu(f) \neq 0\right\}\,.$$

On dit que μ satisfait une inégalité de Sobolev logarithmique avec constante $c > 0$ si pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}$, on a

$$\mathbf{Ent}_\mu(f^2) \leq c\mathcal{E}_\mu(f)\,,$$

La constante de Sobolev logarithmique de μ est définie comme

$$c_{\mathrm{LS}}(\mu) = \inf\left\{\frac{\mathbf{Ent}_\mu(f^2)}{\mathcal{E}_\mu(f)}\,,\ f \in \mathcal{C}\,,\ \mathbf{Var}_\mu(f) \neq 0\right\}\,.$$

(1) Montrer que $2c_{\mathrm{P}}(\mu) \leq c_{\mathrm{LS}}(\mu)$ (pour $f \in \mathcal{C}$, on pourra considérer la fonction $1 + \varepsilon f$, avec $\varepsilon > 0$).

(2) On peut satisfaire une inégalité de Poincaré sans satisfaire une inégalité de Sobolev logarithmique. En effet, soit $\mu = \mathcal{E}(1)$ (loi exponentielle).

 (a) Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}$, on a

$$\mathbf{Var}_\mu(f) \leq 4\mathbf{E}_\mu\left[f'^2\right]\,.$$

 (b) Soit f donnée par : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{ax}{2}}$ avec $0 < a < 1$. Montrer que pour toute constante $c > 0$, on peut trouver $a \in]0, 1[$ tel que $\mathbf{Ent}_\mu(f^2) > c\mathbf{E}_\mu\left[f'^2\right]$. (Certes, une telle fonction f n'appartient pas à la classe $\mathcal{C}$ mais disons que cela fait l'affaire.)

2. Inégalité de Poincaré et de log-Sobolev pour la gaussienne

Le but de cet exercice est de montrer que si μ est la loi d'un vecteur gaussien standard sur $\mathbb{R}^n$, alors pour toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dans la classe $\mathcal{C}$, on a

$$\mathbf{Var}_\mu(f) \leq \mathbf{E}_\mu\left[\|\nabla f\|^2\right] \qquad \text{et} \qquad \mathbf{Ent}_\mu(f^2) \leq 2\mathbf{E}_\mu\left[\|\nabla f\|^2\right]\,.$$

(1) Montrer qu'il suffit d'établir ces résultats pour $n = 1$.

(2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans $\mathcal{C}$. Soient $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ des variables de Rademacher (uniformes sur $\{-1, 1\}$) indépendantes, et soit $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \varepsilon_i$. On note g la fonction de $\{-1, 1\}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = f(S_n)$. Montrer que

$$\mathcal{E}(g) \leq \mathbf{E}\left[f'(S_n)^2 + \frac{2\kappa}{\sqrt{n}}\left|f'(S_n)\right| + \frac{\kappa^2}{n}\right]\,,$$

où $\kappa = \sup f''$.

(3) Conclure à l'aide de ce que l'on sait pour le cube $\{-1, 1\}^n$ et du théorème central limite.

3. Inégalité de Tsirelson-Ibragimov-Sudakov

En utilisant le résultat de l'exercice précédent, montrer que si $(X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien standard sur $\mathbb{R}^n$ et si $Z = f(X_1, \ldots, X_n)$ avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction L-lipschitzienne ($L > 0$), alors pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbf{P}\left(Z - \mathbf{E}Z \geq t\right) \leq \exp\left\{-\frac{t^2}{2L^2}\right\}\,.$$