TD I : Estimation

Exercice 1. *On considère un modèle statistique où l'observation* $\mathbf{Y}$ *suit une loi exponentielle de paramètre* $\theta > 0$*. Montrer qu'il n'existe pas d'estimateur sans biais pour* θ*.*

Exercice 2. *On considère un échantillon* $(Y_i)_{1\leq i\leq n}$ *composé de variables i.i.d suivant une loi de Poisson de paramètre* θ*. Donner par la méthode des moments deux estimateurs sans biais différents de* θ*.*

Exercice 3. *Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance pour un échantillon* $(Y_1, \ldots, Y_n)$ *lorsque les variables* (Y_i) *suivent:*

1. *Une loi exponentielle Exp(*θ*)*
2. *Une loi Gaussienne* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\theta = (\mu, \sigma^2)$.
3. *Une loi de Poisson Poi(*θ*)*

Exercice 4. *On observe n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées* $X_1, \ldots, X_n$*. La distribution commune des observations admet la densité suivante pour la mesure de Lebesgue:*

$$x \to e^{x-\theta}\mathbf{1}_{]-\infty,\theta]}(x)$$

avec $\theta > 0$*.*

1. *Montrer que le maximum de vraisemblance de* θ *vaut* $\hat{\theta} := \max_{i=1\ldots n} X_i$*.*
2. *Montrer que* $n(\theta - \hat{\theta})$ *suit une loi exponentielle de paramètre* 1*.*
3. *Montrer que* $\hat{\theta}$ *est asymptotiquement sans biais.*
4. *Pour* $\alpha \in]0, 1[$*, trouver un intervalle de confiance unilatéral de niveau* $1 - \alpha$ *sur* θ*.*

Exercice 5. *Dans cet exercice, on s'intéresse à la modélisation de la taille des champs pétroliers d'un bassin d'hydrocarbures en cours d'exploitation. On suppose que les tailles des champs déjà découverts à un instant donné sont indépendantes et identiquement distribuées. On note* $R_1, \ldots, R_n$ *les tailles des n champs pétroliers découverts par l'exploration au moment de l'étude.*

1. *Une première modélisation consiste à modéliser la taille des champs d'un bassin pétrolier à l'aide de lois de Paréto. Les champs pétroliers trop petits ne sont pas visibles par les campagnes d'exploration et ceux-ci ne sont donc pas découverts. On modélise alors la loi des champs pétroliers découverts par une loi de Paréto tronquée inférieurement, c'est-à-dire une loi de densité* $f_{\alpha,\eta}(x) = \frac{\alpha\eta^\alpha}{x^{\alpha+1}}$*, pour* $x \geq \eta$ *et* $f_{\alpha,\eta}(x) = 0$ *sinon. Le paramètre* η *n'étant pas connu précisément, nous considérons celui-ci inconnu.*
   (a) *Montrer que la densité* $f_{\alpha,\eta}$ *définit effectivement une densité. Discuter l'existence de l'espérance et la variance d'une telle loi.*
   (b) *Donner l'expression de la vraisemblance de ce modèle.*
   (c) *Calculer les estimateurs du maximum de vraisemblance des paramètres* α *et* η*.*
   (d) *Lorsque celui-ci est possible, donner un intervalle de confiance asymptotique pour la moyenne.*
2. *Une variable aléatoire* X *suit une loi lognormale de paramètres* μ *et* σ *si* $\ln(X)$ *suit la loi normale* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*. Plutôt que d'utiliser les lois de Paréto, une autre modélisation des réserves pétrolières considère que les* R_i *suivent une loi lognormale de paramètres* μ *et* σ*.*
   (a) *Est-il vrai que* $E[R_i] = \exp(\mu)$*?*
   (b) *Proposer, sans calculs, des estimateurs pour les paramètres de cette loi.*

Exercice 6. *(Delmas, 2012) On considère un échantillon* $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ *de variables i.i.d. de carré intégrable. Trouver l'estimateur de la moyenne* $\theta = E[Y_1]$*, qui soit de variance minimale dans la classe des estimateurs linéaires,* $\hat{\theta}_n = \sum_{k=1}^n a_k Y_k$ *et sans biais.*

Exercice 7. *(Delmas, 2012) Le total des ventes mensuelles d'un produit dans un magasin* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *peut être modélisé par une variable aléatoire de loi normale* $\mathcal{N}(m_i, \sigma^2)$*. On suppose les constantes* $m_i > 0$ *et* $\sigma > 0$ *connus. Une campagne pubilicitaire est menée afin de permettre l'augmentation des ventes. On note* X_i *la vente mensuelle du magasin* i *après la campagne publicitaire. On suppose que les variables* X_i *sont indépendantes.*

1. *On suppose que l'augmentation des ventes se traduit par une augmentation de chacune des moyennes* m_i *d'une quantité* α*. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de* α*. Donner sa loi et ses propriétés.*
2. *On suppose que l'augmentation des ventes se traduit par une multiplication de chacune des moyennes* m_i *par une quantité* β*. On considère l'estimateur de* β

   $$\tilde{\beta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{m_i}$$

   Donner sa loi et ses propriétés à horizon fini.
3. *Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de* β*. Donner sa loi et ses propriétés à horizon fini.*