RAPPELS SUR LES VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Exercice 1 (Loi uniforme). Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et X une variable aléatoire uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 2 (Convolution). Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. On pose $Z = X + Y$. Exprimer la loi de Z en fonction des lois de X et Y.
2. Exprimer l'espérance et la variance de Z en fonction de celles de X et Y (si elles existent).
3. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre λ et que Y suit la loi de Poisson de paramètre μ. Quelle est alors la loi de Z ?

Exercice 3 (Loi de Bernoulli, loi Binômiale, loi de Poisson). Soit $n \geq 1$ un entier. On lance n fois une pièce de monnaie biaisée, qui a une certaine probabilité $0 < p < 1$ de tomber sur pile à chaque lancer, indépendamment des autres lancers. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si le résultat du i-ème lancer est pile} \\ 0 & \text{si le résultat du i-ème lancer est face.} \end{cases}$$

On s'intéresse au nombre total de pile obtenus :

$$Z := \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X_i ? Son espérance ? Sa variance ?
2. Quelle est la loi de la variable aléatoire Z ? Son espérance ? Sa variance ?
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, la quantité $\mathbb{P}(Z = k)$ calculée à la question précédente est une fonction des paramètres n, p et k. On la note $f(n, p, k)$. Soit $(p_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres dans $]0, 1[$ telle que $np_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \lambda$ pour un certain $\lambda \in]0, \infty[$. Montrer que

   $$f(n, p_n, k) \xrightarrow[n \to \infty]{} q_k,$$

   où q_k est une certaine quantité que l'on calculera.
4. Montrer que la suite $(q_k)_{k \geq 0}$ définit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$. Comment s'appelle cette loi ? Quelle est son espérance ? Sa variance ?

Exercice 4 (Loi géométrique). On lance une infinité de fois une pièce de monnaie biaisée, qui a une probabilité $0 < p < 1$ de tomber sur pile. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on définit les événements :

$$\begin{aligned} A_n &= \{\text{au n-ème lancer, la pièce tombe sur pile}\} \\ B_n &= \{\text{la pièce ne tombe sur pile à aucun des n premiers lancers}\} \\ C_n &= \{\text{au n-ème lancer, la pièce tombe sur pile pour la première fois}\}. \end{aligned}$$

1. Exprimer B_n à l'aide des événements $(A_n)_{n\geq 1}$. En déduire $\mathbb{P}(B_n)$.
2. Décrire avec des mots l'événement $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, puis calculer sa probabilité.
3. Exprimer C_n à l'aide des événements $(A_n)_{n\geq 1}$. En déduire $\mathbb{P}(C_n)$.
4. Décrire avec des mots l'événement $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ puis calculer sa probabilité.
5. On note X le numéro du premier lancer qui produit un pile ($X = \infty$ si la pièce ne tombe jamais sur pile). Quelle est la loi de X ? Son espérance ? Sa variance ?
6. Établir la propriété d'*absence de mémoire* : pour tout $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(X > n + m | X > n\right) = \mathbb{P}\left(X > m\right).$$

Exercice 5 (Loi Zéta). On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, de loi

$$\mathbb{P}(X = n) \quad = \quad \frac{C}{n^2} \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

1. Quelle valeur doit on donner à la constante C ?
2. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement $A_m = \{X \text{ est un multiple de } m\}$. Calculer $\mathbb{P}(A_m)$.
3. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur m, n pour que les événements A_m et A_n soient indépendants.
4. On note p_i le $i-$ème nombre premier ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, etc). Les événements $(A_{p_i})_{i\geq 1}$ sont-ils indépendants ?
5. Soit $B_n := \{X \text{ n'est divisible par aucun des } p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Calculer $\mathbb{P}(B_n)$ pour $n \geq 1$.
6. Que vaut l'ensemble $\displaystyle\bigcap_{n\geq 1} B_n$? En déduire la formule d'Euler :

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}.$$

Exercice 6 (Convergence commutative).

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. Montrer que si $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| < \infty$, alors pour toute permutation $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la série de terme général $u_{\sigma(n)}$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{\sigma(n)} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

2. On considère la série harmonique alternée :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots.$$

Montrer qu'elle est convergente et calculer sa somme.

3. On réordonne la série en alternant 1 terme positif et 2 termes négatifs, dans l'ordre :

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \cdots.$$

Montrer que cette nouvelle série converge et calculer sa somme.