Sol. 15 Par définition d'une limite inférieure, on a :

$$\underline{\lim}\,(-u_n) = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} (-u_k) \qquad (*)$$

Nous allons établir un lemme préliminaire.

Lemme : Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}$. Alors, en définissant $-A = \{-x,\ x\in A\} \subseteq \mathbb{R}$, on a l'égalité :

$$\inf(-A) = -\sup A$$

Preuve du lemme :

Notons $M = \sup A$, ce qui équivaut à : $\begin{cases} \forall x\in A, & x\leq M \\ \forall \varepsilon>0, & \exists a\in A,\ M-\varepsilon<a \end{cases}$

On a donc $\forall x\in(-A) \quad -x\leq M \iff x\geq -M$

et donc $-M$ est un minorant de $(-A)$. C'est même le + grand car :

$\forall\varepsilon>0 \quad \exists a'\in(-A) \quad M-\varepsilon<-a' \iff a'<-M+\varepsilon$

On a ainsi prouvé $-M = \inf(-A)$, ce qu'on voulait. ☒

D'après ce lemme, on a, en revenant à $(*)$,

$$\underline{\lim}\,(-u_n) = \lim_{n\to+\infty}\Big(-\sup_{k\geq n} u_k\Big) = -\lim_{n\to+\infty}\sup_{k\geq n} u_k$$

$$= -\overline{\lim}\,u_n.$$

On a ainsi établi la 1ère égalité demandée. On peut appliquer celle-ci à la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est aussi bornée :

$$\underline{\lim}\,(u_n) = -\overline{\lim}\,(-u_n)$$

et l'on obtient ainsi la 2nde égalité demandée.

Sol. 16 Par définition d'une limite supérieure, on a :

$$\overline{\lim}\,(u_n+v_n) = \lim_{n\to+\infty}\sup_{k\geq n}(u_k+v_k) \qquad (**)$$

Nous allons établir un lemme préliminaire.

Lemme : Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles bornées. Alors,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(a_n+b_n) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n + \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n$$

Preuve du lemme :

Notons $A = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $B = \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n$

Nous avons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leq A \quad \text{et} \quad b_n \leq B \quad \Rightarrow \quad a_n + b_n \leq A+B$$

Ainsi, $A+B$ est un majorant de $\{a_n+b_n,\ n\in\mathbb{N}\}$, ce qui implique :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} (a_n+b_n) \leq A+B.$$

Nous avons ainsi établi la majoration cherchée et nous remarquons qu'elle peut être stricte en considérant l'exemple suivant.

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad a_n := (-1)^n \qquad b_n =: (-1)^{n+1} \quad \Rightarrow a_n+b_n = 0$$

$$0 = \sup_{n\in\mathbb{N}} (a_n+b_n) < \underbrace{\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n}_{=1} + \underbrace{\sup_{n\in\mathbb{N}} b_n}_{=1}$$

$\blacksquare$

D'après ce lemme, on a, en revenant à (**),

$$\overline{\lim}\,(u_n+v_n) \leq \lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{k\geq n} u_k + \sup_{k\geq n} v_k \right),$$

en remarquant que cette limite est bien définie car les suites $\left(\sup_{k\geq n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sup_{k\geq n} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes et minorées (par un minorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ resp. un minorant de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$) donc convergent.

Finalement, on obtient :

$$\overline{\lim}\,(u_n+v_n) \leq \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} u_k + \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} v_k$$

i.e. $\overline{\lim}\,(u_n+v_n) \leq \overline{\lim}\, u_n + \overline{\lim}\, v_n$.

L'inégalité peut être stricte, comme on le constate en prenant le même exemple que précédemment :

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad u_n := (-1)^n \qquad v_n := (-1)^{n+1} \quad \Rightarrow \quad u_n+v_n = 0$$

$$0 = \overline{\lim}\,(u_n+v_n) < \underbrace{\overline{\lim}\,(u_n)}_{=1} + \underbrace{\overline{\lim}\,(v_n)}_{=1}$$