Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Section I : $\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné

Thierry Meyre

Université de Paris– Institut de Recherche en Enseignement des Mathématiques

Mai 2020

I.1. Bref rappel sur les anneaux et les corps

On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ de deux opérations, l'addition notée $+$ et la multiplication notée $\times$, de sorte que $(\mathbb{R}, +, \times)$ a une structure d'*anneau*, ce qui signifie qu'il possède les trois propriétés suivantes.

I.1. Bref rappel sur les anneaux et les corps

On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ de deux opérations, l'addition notée $+$ et la multiplication notée $\times$, de sorte que $(\mathbb{R}, +, \times)$ a une structure d'*anneau*, ce qui signifie qu'il possède les trois propriétés suivantes.

Propriété 1 : $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif

- Associativité : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- Élément neutre noté 0 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 0 = 0 + x = x$.
- Symétrique : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists (-x) \in \mathbb{R}$, $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
- Commutativité : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x + y = y + x$.

I.1. Bref rappel sur les anneaux et les corps

On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ de deux opérations, l'addition notée $+$ et la multiplication notée $\times$, de sorte que $(\mathbb{R}, +, \times)$ a une structure d'*anneau*, ce qui signifie qu'il possède les trois propriétés suivantes.

Propriété 1 : $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif

- Associativité : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- Élément neutre noté 0 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 0 = 0 + x = x$.
- Symétrique : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists (-x) \in \mathbb{R}$, $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
- Commutativité : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x + y = y + x$.

Exercice 1 : Montrer que l'élément neutre 0 est unique.
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le symétrique $(-x)$ est unique.
En déduire que $-(-x) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

I.1. Bref rappel sur les anneaux et les corps

On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ de deux opérations, l'addition notée $+$ et la multiplication notée $\times$, de sorte que $(\mathbb{R}, +, \times)$ a une structure d'*anneau*, ce qui signifie qu'il possède les trois propriétés suivantes.

Propriété 1 : $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif

- Associativité : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- Élément neutre noté 0 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 0 = 0 + x = x$.
- Symétrique : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists (-x) \in \mathbb{R}$, $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
- Commutativité : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x + y = y + x$.

Exercice 1 : Montrer que l'élément neutre 0 est unique.
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le symétrique $(-x)$ est unique.
En déduire que $-(-x) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Remarque : L'addition étant commutative, le symétrique est plutôt appelé *l'opposé*.

I.1. Bref rappel sur les anneaux et les corps

La deuxième propriété concerne la multiplication $\times$.

Propriété 2 : $(\mathbb{R}, \times)$ satisfait les deux assertions suivantes

- Associativité : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.
- Élément neutre noté 1 : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \times 1 = 1 \times x = x$.

La troisième propriété concerne à la fois la multiplication et l'addition.

I.1. Bref rappel sur les anneaux et les corps

La deuxième propriété concerne la multiplication $\times$.

Propriété 2 : $(\mathbb{R}, \times)$ satisfait les deux assertions suivantes

- Associativité : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.
- Élément neutre noté 1 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \times 1 = 1 \times x = x$.

La troisième propriété concerne à la fois la multiplication et l'addition.

Propriété 3 : Distributivité de $\times$ par rapport à $+$

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z) \text{ et } (x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z).$$

I.1. Bref rappel sur les anneaux et les corps

La deuxième propriété concerne la multiplication $\times$.

Propriété 2 : $(\mathbb{R}, \times)$ satisfait les deux assertions suivantes

- Associativité : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.
- Élément neutre noté 1 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \times 1 = 1 \times x = x$.

La troisième propriété concerne à la fois la multiplication et l'addition.

Propriété 3 : Distributivité de $\times$ par rapport à $+$

Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z) \text{ et } (x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z).$$

Exercice 2. Prouver que, dans tout anneau $(\mathbb{A}, +, \times)$, on a la propriété suivante : pour tout $x \in \mathbb{A}$, $0 \times x = x \times 0 = 0$.

I.1. Bref rappel sur les anneaux et les corps

Exemple : On appelle *anneau trivial* (ou *anneau nul*) l'anneau $\big(\{0\}, +, \times\big)$.

Dans n'importe quel anneau $\mathbb{A}$ non nul, on a $0 \neq 1$, comme nous allons le prouver en raisonnant par l'absurde.
Si $1 = 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{A}$, $x = x \times 1 = x \times 0 = 0$, donc $\mathbb{A}$ serait réduit à l'anneau nul $\{0\}$.

Exemple 2 : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau.

Exercice 3 : Soit $\mathbb{A}$ un anneau. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{A}$, on a l'égalité : $(-1) \times x = x \times (-1) = -x$.

I.1. Bref rappel sur les anneaux et les corps

On dit qu'un anneau $(\mathbb{A}, +, \times)$ est commutatif si la multiplication est commutative. Ainsi, $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau commutatif puisque :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \times y = y \times x.$$

Donnons un exemple d'anneau non commutatif. Notons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $A = [a_{i,j}]^2_{(i,j) \in [\![1;n]\!]}$ à coefficients réels.
On le munit d'une addition en posant $A + B = [a_{i,j} + b_{i,j}]_{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2}$, et d'une multiplication en posant $A \times B = [c_{i,j}]_{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2}$ avec :

$$\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Alors, $\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times\right)$ est un anneau non commutatif car on n'a pas en général $AB = BA$.

I.1. Bref rappel sur les anneaux et les corps

Définition

On dit que $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un *corps* si $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un anneau dans lequel tout élément non nul admet un symétrique pour $\times$:

$$\forall x \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad \exists x^{-1} \in \mathbb{K}, \quad x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1.$$

I.1. Bref rappel sur les anneaux et les corps

Définition

On dit que $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un *corps* si $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un anneau dans lequel tout élément non nul admet un symétrique pour $\times$:

$$\forall x \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad \exists x^{-1} \in \mathbb{K}, \quad x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1.$$

Remarque 1 : Le symétrique pour $\times$ est encore appelé *inverse*.

I.1. Bref rappel sur les anneaux et les corps

Définition

On dit que $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un *corps* si $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un anneau dans lequel tout élément non nul admet un symétrique pour $\times$:

$$\forall x \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad \exists x^{-1} \in \mathbb{K}, \quad x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1.$$

Remarque 1 : Le symétrique pour $\times$ est encore appelé *inverse*.

Remarque 2 : Dans un anneau non nul, 0 ne peut avoir d'inverse puisque, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $0 \times y = y \times 0 = 0 \neq 1$. C'est pourquoi la condition précédente porte sur $x \in \mathbb{K}^*$.

I.1. Bref rappel sur les anneaux et les corps

Définition

On dit que $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un *corps* si $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un anneau dans lequel tout élément non nul admet un symétrique pour $\times$:

$$\forall x \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad \exists x^{-1} \in \mathbb{K}, \quad x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1.$$

Remarque 1 : Le symétrique pour $\times$ est encore appelé *inverse*.

Remarque 2 : Dans un anneau non nul, 0 ne peut avoir d'inverse puisque, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $0 \times y = y \times 0 = 0 \neq 1$. C'est pourquoi la condition précédente porte sur $x \in \mathbb{K}^*$.

Remarque 3 : Si $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps, alors $(\mathbb{K}^*, \times)$ est un groupe.

I.1. Bref rappel sur les anneaux et les corps

Définition

On dit que $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un *corps* si $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un anneau dans lequel tout élément non nul admet un symétrique pour $\times$:

$$\forall x \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad \exists x^{-1} \in \mathbb{K}, \quad x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1.$$

Remarque 1 : Le symétrique pour $\times$ est encore appelé *inverse*.

Remarque 2 : Dans un anneau non nul, 0 ne peut avoir d'inverse puisque, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $0 \times y = y \times 0 = 0 \neq 1$. C'est pourquoi la condition précédente porte sur $x \in \mathbb{K}^*$.

Remarque 3 : Si $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps, alors $(\mathbb{K}^*, \times)$ est un groupe.

Remarque 4 : Un corps étant un cas particulier d'anneau, il est dit *commutatif* si la multiplication est commutative.

Exemple 1 : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Exemple 1 : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Exemple 2 : Si p est un entier premier, alors $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Exemple 1 : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Exemple 2 : Si p est un entier premier, alors $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Exercice 4 : Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps et soit $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$. On fait les quatre hypothèses suivantes.

- $1 \in \mathbb{L}$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{L}^2,\ x - y \in \mathbb{L}$, où $x - y := x + (-y)$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{L}^2,\ x \times y \in \mathbb{L}$
- $\forall x \in \mathbb{L}^*,\ x^{-1} \in \mathbb{L}$.

On munit $\mathbb{L}$ de l'addition induite et de la multiplication induite.
Démontrer que $(\mathbb{L}, +, \times)$ est un corps.
On dit que $(\mathbb{L}, +, \times)$ est un *sous-corps* de $(\mathbb{K}, +, \times)$.

Exercice 5 : Vérifier que $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Exercice 6 : On note $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2},\ (a, b) \in \mathbb{Q}^2\} \subseteq \mathbb{R}$.
Montrer que $\left(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \times\right)$ est un corps commutatif.

Indication. On pourra utiliser : $(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$.

On déduit de ces exercices que $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un sous-corps de $\left(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \times\right)$, qui est lui-même un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
Ce sont des sous-corps au sens strict puisque $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subsetneq \mathbb{R}$.