Université Pierre et Marie Curie | **Année 2011-2012**
L3 - Mathématiques | Second semestre
Probabilités - LM390 | Groupe 1

Feuille de TD n°4

I. Quelques généralités

Exercice 1

1. Soit X une v.a. de fonction de répartition F. On suppose que F est continue en $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathbb{P}(X = a) = 0$.
2. Soit X une v.a. de fonction de répartition F, continue sur $\mathbb{R}$. Donner la loi de $F(X)$.
3. Soit X et Y deux v.a. indépendantes. On suppose que X a une fonction de répartition continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

Exercice 2
Soient $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. (indépendantes et identiquement distribuées). On suppose que X_1 a une fonction de répartition continue. Calculer $\mathbb{P}(X_1 \leq X_2 \leq \cdots \leq X_n)$.

II. Autour des lois usuelles

Exercice 3
Pour les lois uniforme, exponentielle et gaussienne,

1. Calculer l'espérance et la variance.
2. Calculer la fonction de répartition.
3. Calculer la fonction caractéristique.

Exercice 4
Soit Y une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et ε une variable aléatoire indépendante de Y et telle que $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2$.

1. Calculer la densité et la fonction caractéristique de $Z = \varepsilon Y$. La loi de Z est appelée loi exponentielle symétrique.
2. En déduire la fonction caractéristique de la loi de Cauchy.

Exercice 5
Une variable aléatoire positive X est *sans mémoire* si

$$\forall\, t, s \geq 0, \qquad \mathbb{P}(X > t + s \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s).$$

1. Montrer que si $\mathbb{P}(X > 0) > 0$, alors $\mathbb{P}(X > t) > 0$ pour tout $t > 0$.
2. On suppose que $\mathbb{P}(X > 0) > 0$. Soit $h(t) := \log \mathbb{P}(X > t)$ pour tout $t > 0$. Montrer que $h(t) = th(1)$ pour tout t entier, puis t rationnel positif, puis t réel positif.
3. En déduire que soit $X = 0$ *p.s.*, soit X suit une loi exponentielle.

Exercice 6
Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ n variables indépendantes, telles que pour tout i, X_i suit une loi gaussienne $\mathcal{N}(m_i, \sigma_i)$. Montrer que $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ suit une loi gaussienne dont on donnera les paramètres en fonction de $(m_i, \sigma_i)_{1\leq i\leq n}$. On pourra s'aider des fonctions caractéristiques.

Exercice 7
Donner la loi de la somme de deux variables indépendantes X et Y telles que

1. X et Y suivent des lois exponentielles,
2. X et Y suivent une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$.

III. Loi de minimum, maximum

Exercice 8
Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une famille de variables i.i.d.. Donner la loi de $\min_{1\leq i\leq n} X_i$ et $\max_{1\leq i\leq n} X_i$ lorsque X_i a pour loi

1. la loi uniforme sur $[a, b]$,
2. une loi exponentielle,
3. une loi de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 9
Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ des v.a. positives indépendantes et de même fonction de répartition F continue et telle que $F(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Soit un réel $a > 0$. On pose $N := \min\{n \geq 1 : X_n > a\}$. Donner la loi de N et montrer que $\mathbb{P}(N < +\infty) = 1$. Calculer $\mathbb{E}[N]$.
2. Montrer que N et X_N sont indépendantes.
3. On pose cette fois-ci $N := \min\{n \geq 1 : X_n > X_0\}$. Donner la loi de N et montrer que $\mathbb{P}(N < +\infty) = 1$. Calculer $\mathbb{E}[N]$.
4. On suppose dans cette question que les variables $(X_n)_{n\geq 0}$ suivent une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et on garde N comme dans 3. Donner la loi de $(X_0, X_N - X_0)$ et montrer que ces variables sont indépendantes.
5. Trouver la loi de (N, X_N). On pourra calculer $\mathbb{P}(N = n, X_N \leq t)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Les variables N et X_N sont-elles indépendantes ? Donner la fonction de répartition de X_N.

IV. Indépendance de deux variables

Exercice 10
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, et de même loi de densité donnée par

$$f(x) = \frac{\lambda^4}{6} x^3 \mathrm{e}^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

On pose $V = X + Y$ et $W = \frac{X}{X+Y}$.

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité.
2. Calculer la densité du couple (V, W).
3. Montrer que V et W sont indépendantes et donner leurs lois marginales.

Exercice 11
On se donne $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. On note $Y := \min_{1\leq i\leq n} X_i$ et $Z := \max_{1\leq i\leq n} X_i$.

1. Donner la loi de (Y,Z).
2. Montrer que $(1-Z, 1-Y)$ a même loi que (Y,Z).
3. Donner la loi de $\frac{Y}{Z}$.
4. Montrer que $\frac{1-Z}{1-Y}$ est indépendant de Y.

V. Statistiques d'ordre

Dans les exercices suivants, les statistiques d'ordre $X_{(1)},\ldots,X_{(n)}$ désigne les variables $X_1,\ldots,X_n$ arrangés par ordre croissant.

Exercice 12
Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables i.i.d. admettant une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue. Quelle est la densité de $(X_{(1)},\ldots,X_{(n)})$?

Exercice 13
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S_n = X_1+\cdots+X_n$, et pour $t>0$, $N(t) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n\leq t\}}$.

1. Donner la loi de $(S_1,\ldots,S_n)$ puis de S_n.
2. Montrer que la loi conditionnelle de $(S_1,\ldots,S_n)$ sachant $N(t)=n$ est la loi statistique d'ordre $(U_{(1)},\ldots,U_{(n)})$ de n v.a. i.i.d de loi uniforme sur $[0,t]$.

Exercice 14
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $S_n = X_1+\ldots+X_n$. Montrer que $(\frac{S_k}{S_n})_{1\leq k\leq n-1}$ a la loi de la statistique d'ordre $(U_{(1)},\ldots,U_{(n-1)})$ de $n-1$ v.a. i.i.d de loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 15
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi de fonction de répartition F continue. Soit $m\geq 1$ et $X_{(1)},\ldots,X_{(m)}$ les statistiques d'ordre de $X_1,\ldots,X_m$.

1. Soit $N := \min\{n\geq 1 : X_{m+n} \geq X_{(m)}\}$. Donner la loi de N.
2. Pour $r<m$, soit $N_r := \min\{n\geq 1 : X_{m+n}\geq X_{(m-r)}\}$. Donner la loi de N_r.