Université Pierre et Marie Curie — Licence - Mathématiques - LM346

Année 2011–20112 — Processus et simulations

Série d'exercices N°3
Chaînes de Markov et simulation

On écrira CM pour une Chaine de Markov.

Exercice 0 :
Un magasin vend des réveils provenant de 2 usines différents A et B. On a constaté que que 17% des réveils vendus dans ce magasin présentaient un défaut. On a de plus réussi à établir que 20% des réveils de l'usine A étaient défectueux contre 10% pour l'usine B. Calculer la proportion de réveils provenant de l'usine A.

Un réveil pris au hasard dans le magasin présente un défaut. Quelle est la probabilité conditionnelle qu'il provienne de l'usine B sous cette condition ?

Exercice 1 :
Soit (X, Y) un couple de v.a. positives de densité jointe $f(x, y) = \frac{C}{(1+x+y)^5}$ sur $(\mathbb{R}^+)^2$. Donner, pour $x > 0$, la densité puis l'espérance conditionnelle de Y sachant $X = x$.

Exercice 2 :
Soit X_0 une v.a. à valeurs dans E ensemble fini. Soit U_1, U_2,... une suite i.i.d. de v.a. uniformément distribuées sur [0,1]. Soit $F : E \times [0, 1] \to E$ une fonction à deux variables. On définit la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ à l'aide de la relation de récurrence $X_{n+1} = F(X_n, U_{n+1})$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov. Écrire sa matrice de transition en fonction de F. Peut-on réaliser toute chaîne de Markov sous cette forme ? En déduire une manière de simuler un chaîne de Markov.

Exercice 3 :
Un joueur fréquente 3 casinos numérotés 1, 2 et 3. Chaque jour il choisit l'un des deux casinos où il n'est pas allé la veille, avec probabilité $\frac{1}{2}$. Le premier jour, $(n = 0)$, il choisit l'un des trois casinos $1, 2, 3$ avec probabilités $1/4, 1/4, 1/2$ respectivement.

On note X_n la v.a. égale au numéro du casino fréquenté le jour n par le joueur.

1. Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov et calculer sa matrice de transition Q.
2. Donner $P(X_1 = 1 \mid X_0 = 3)$, $P(X_3 = 3 \mid X_1 = 2)$, $P(X_8 = 3 \mid X_5 = 2)$.
3. Donner $P(X_1 = 1, X_4 = 3, X_5 = 2, X_7 = 1)$

Exercice 4 :
Une souris effectue une suite de déplacements aléatoires, indépendants les uns des autres entre trois pièces numérotées 1, 2 et 3. La règle des déplacements est alors la suivante :

- Lorsque la souris est dans la pièce 1, elle y reste avec la probabilité $\frac{1}{3}$ ou bien passe dans l'une des deux autres pièces suivant la même probabilié $\frac{1}{3}$.
- Lorsque la souris est dans la pièce 2, elle y reste avec la probabilité $\frac{1}{2}$ ou passe dans la pièce 3 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.
- Lorsque la souris est dans la pièce 3, elle y reste.

On note X_0 le numéro de la pièce initialement occupée par la souris, (X_0 peut être aléatoire), X_n, $n \geq 1$, le numéro de la pièce occupée par la souris après son n-ième déplacement.

1. Justifier que X_n est une chaîne de Markov à valeurs $\{1, 2, 3\}$ et donner sa matrice de transition Q.
2. Calculer $P(X_{n+3} = 1 \mid X_n = 2)$.
3. Calculer $P(X_0 = 1, X_2 = 3, X_5 = 2, X_7 = 1)$ si X_0 prend des valeurs $1, 2, 3$ avec probabilités $1/6, 1/2, 1/3$ respectivement.
4. Diagonaliser Q. Calculer la matrice Q^n. Donner $P(X_{k+n} = 3 \mid X_k = 1)$.

Exercice 5 :
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une CM avec la matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $P(X_n = 1 \mid X_0 = 1)$ dans chacun des cas suivants (a) $p = 1/16$; (b) $p = 1/6$; (c) $p = 1/12$.

Exercice 6 :
A. Une chaîne de Markov à valeurs dans $\{0, 1\}$ a toujours une matrice de transition de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

1) Décrire la chaîne dans le cas où $p = q = 0$ puis dans le cas où $p = q = 1$. On supposera par la suite que $(p, q) \neq (0, 0)$.
2) Calculer M^n.

B. Un virus peut exister sous N formes différentes. A chaque instant, avec probabilité $1 - \alpha$, il reste sous sa forme où il est, ou avec la probabilité respective α, il mute sous une forme différente, uniformement choisie parmi les autres $N - 1$ formes. Quelle est la probabilité que la forme du virus au temps n est la même qu'au temps 0 ?

Suggeston : Réduire le problème à l'analyse d'une CM à deux états et utiliser la partie A de l'exercice.

Exercice 7 : A Donner les classes d'états pour les CM dans les exercices 3,4,5,6, dire lesquelles sont fermées.

B Identifier les classes des matrices de transition suivantes et trouver les classes fermées.

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 2/5 & 0 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/7 & 1/7 & 0 & 1/7 & 0 & 1/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 2/7 & 1/7 & 4/7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 & 0 & 4/5 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/8 & 2/8 & 1/8 & 3/8 & 1/8 \\ 2/5 & 0 & 0 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

On admetra les notations pour les exercices suivants :

$$T^A = \min\{n > 0 : X_n \in A\}, \; h_i^A = \mathbf{P}(T^A < \infty \mid X_0 = i), \quad k_i = \mathbf{E}(T^C \mid X_0 = i)$$

où C est l'ensemble de toutes les classes récurrentes.

Exercice 8 : On considère une CM sur $\{1, 2, 3, 4\}$ avec $P_{1,1} = P_{4,4} = 1$, $P_{2,1} = P_{2,3} = P_{3,2} = P_{3,4} = 1/2$.

Donner les classes de cette CM et les caractériser.

Donner h_2^1, h_3^1, h_2^4, h_3^4. Donner k_2 et k_3.

Exercice 9 : Quelles sont les classes récurrentes et quelles sont transientes dans l'exercice 7 ?

Que peut-on dire du comportement des CM des exercices 3,4,5 lorsque $n \to \infty$?

Dans l'exercice 7, la partie **B** :

Pour Q_1 calculer h_2^1, h_3^1. En déduire h_3^2 et h_3^7. Donner k_3 le temps moyen d'absorption dans une classe récurrente au départ de l'état 3.

Pour la matrice Q_2 donner $h_4^{(A)}$ et $h_6^{(A)}$ pour différents $A \subset (1, 2, 3)$. Que peut-on dire de h_4^B et h_6^B pour $B \subset \{5, 7\}$? Donner k_4 le temps moyen d'absorption dans une classe récurrente au départ de l'état 4.

Pour la matrice Q_3 donner h_4^1 et h_4^2. Calculer k_4.

Exercice 10

Donner les classes et étudier la récurrence/transience des CM sur E de matrices de transition suivantes.

a) $E = \mathbf{Z}$, $P_{i,i+1} = p$, $P_{i,i-1} = q = 1 - p$, $p \in]0, 1[$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$

Suggestion : utiliser la loi de grands nombres, calculer $P_{0,0}^{(n)}$, ensuite voir la convergence/divergence de la série $\sum_n P_{0,0}^{(n)}$.

b) $E = \mathbf{Z}^2$, $P_{(i,j),(i+1,j)} = P_{(i,i),(i,j+1)} = P_{(i,j),(i,j-1)} = P_{(i,i),(i-1,j)} = 1/4$ pour tout $(i, j) \in \mathbf{Z}$.

c) $E = \mathbf{Z}^3$, $P_{(i,j,k),(i+1,j,k)} = P_{(i,i,k),(i,j+1,k)} = P_{(i,j,k),(i,j-1,k)} = P_{(i,i,k)=(i-1,j,k)} = P_{(i,j,k),(i,j,k+1)} = P_{(i,j,k),(i,j,k-1)} = 1/6$. Calculer $\mathbf{P}(|X_n| \to \infty, \;\; \text{quand } n \to \infty)$.

Exercice 11 Donner toutes les lois de probabilité stationnaires pour les CM suivantes :

a) la CM de l'ex.3. Supposons de plus que le loi initile de cette CM est $(1/3, 1/3, 1/3)$. Donner sans calcul $\mathbf{P}(X_{345} = 2)$.

b) la CM de l'ex 4.
c) la CM de l'ex 5.
d) la CM de l'ex. 6
e) la CM de matrice Q_1 de l'ex 7B. Supposons de plus que la loi initiale pour cette CM est $(1/3, 1/2, 0, 0, 0, 0, 1/6)$. Donner (sans calcul) $\mathbf{P}(X_{1000} = 1)$ et $\mathbf{P}(X_{2000} = 7)$.
f)la CM de matrice Q_2 de l'ex 7B
g)la CM de matrice Q_3 de l'ex 7B

Exercice 12 : 1) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un espace E fini de matrice de transition Q bistochastique, c'est à dire que $\sum_{i\in E} Q_{i,j} = 1$ pour tout $j \in E$ et $\sum_{j\in E} Q_{i,j} = 1$ pour tout $i \in E$. Prouver que la loi μ avec $\mu_i = 1/|E|$ pour tout $i \in E$ est une loi de probabilité stationnaire.
2) Une particule se déplace entre les 8 sommets d'un cube le long de ses arêtes : à chaque instant, en partant d'un sommet, elle choisit une des 3 arêtes adjacentes avec la probabilité 1/3. Soit i le sommet initial occupé par la particule, j le sommet opposé à i. Calculer le temps moyen de retour dans un sommet à i en partant de ce sommet.

Exercice 13 : 1) Supposons que pour une CM sur E de matrice de transition Q le système de $|E|(|E| - 1)/2$ équations $\mu_i Q_{i,j} = \mu_j Q_{j,i}$ a une solution μ. Prouver que cette solution μ proprement normalisée est une loi de probabilité stationnaire pour cette CM.
2) Soit $G = (E, A)$ un graphe fini où E désigne l'ensemble de sommets et A l'ensemble des arêtes. Sur E on considère la matrice de transition $Q = (Q_{ij})_{i,j\in E}$ par $Q_{ij} = 1/k_i$ si le sommet j est contigu à i et 0 sinon; k_i est le nombre de sommets contigus au sommet i.

Montrer que cette CM est irréductible. Montrer que si $k = \sum_{i\in E} k_i$, alors la loi $\mu_i = k_i/k$ est la loi stationnaire.

Une particule se déplace sur l'ensemble de sommets E d'un graph (E, A) : si à l'instant n elle se trouve en $i \in E$, alors à l'instant $n+1$ elle va en $j \in E$ avec la probabilité k_i/k si le sommet j est contigu à i et 0 sinon; k_i est le nombre de sommets contigus au sommet i. Quel est le temps moyen nécessaire pour retourner dans son sommet de départ ?

Exercice 14
a) On considère la CM de l'ex.3. Soit ν une loi initiale quelconque. Donner $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = i)$ pour $i = 1, 2, 3$ et justifier bien votre réponse.
b) On considère la CM de l'ex.4. Soit ν une loi initiale quelconque. Donner $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = i)$ pour $i = 1, 2, 3$ et justifier bien votre réponse.
c) On considère la CM de l'ex 5. Soit ν une loi initiale quelconque. Donner $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = i)$ pour $i = 1, 2, 3$ et justifier bien votre réponse.

Donner $\lim_{n\to\infty} P^n$. Comparer le résultat avec celui de l'ex. 5 pour les valeurs de p particulières.

d) On considère la CM de l'ex 6. Soit ν une loi initiale quelconque et $p, q \in]0, 1[$. Donner $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = i)$ pour $i = 1, 2$ et justifier bien votre réponse.

Est-ce que cette limite existe si $p = q = 1$? Pourquoi ?

f) On considère la CM de matrice Q_1 de l'ex 7B. Donner $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_i(X_n = 2)$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots, 7$.

Soit $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_7)$ une loi initiale quelconque. Donner $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = 2)$ sous cette loi. Donner aussi $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = i)$ pour $i = 3, 4, 5, 6, 7$ sous cette loi.

g) Pour la matrice Q_2 de l'ex. 7B: donner la limite de la matrice $\lim_{n\to\infty} Q^n$

Exercice 15 : Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov de matrice de transition sur l'espace d'états $\{0,1,2,3\}$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer ses classes, leurs périodes et toutes les lois de probabilité stationnaires.

Quels Théorèmes limites peut-on appliquer à cette chaine de Markov ?

Exercice 16: On considère un reservoir d'eau de capacité de $0 < c < \infty$ unités. A chaque instant du temps $n = 0, 1, 2, \ldots$ une unité d'eau, si présente, quitte le reservoir et A_n unités d'eau y arrivent. On suppose que A_n sont des variables alátoires indépendantes, de même loi, à valeurs dans $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

On note $P(A_0 = i) = a_i$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots$, $EA_0 < \infty$, $Ez^{A_0} = A(z)$.

Si le reservoir est plein, l'eau qui y arrive, est perdue.

Soit X_n le nombre d'unités d'eau dans le reservoir à l'instant n. Alors, $X_0 = 0$ et

$$X_{n+1} = (X_n + A_n - 1_{X_n > 0}) \wedge c.$$

(1) $(X_n)_{n \geq 0}$ est une CM à temps discret sur $\{0, 1, \ldots, c\}$.

• Ecrire sa matrice de transition P en terme de a_i et de c.

• Comment calculer les mesures de probabilités invariantes en terme de P ? (On ne demande pas de faire le calcul).

• Sous quelle condition sur la matrice P la mesure de probabilité invariante est unique ?

(2) Supposons que P est irréductible. Soit $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_c)$ sa mesure de probabilité invariante.

• Donner la formule de la proportion asymptotique de temps où le réservoir est vide pendant la période de temps $[0, n-1]$, cad $n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} 1_{\{X_k = 0\}}$, quand $n \to \infty$ en terme de π.

• Donner une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0)$ et donner la formule pour cette limite en terme de π.

• Soit $X_0 = 0$ et $T = \min\{n > 0 : X_n = 0\}$. Donner ET en terme de π.

Exercice 17: Soit $Y_1, Y_2, \ldots$ des v.a. i.i.d. prenant des valeurs dans $\{1, 2, 3, \ldots\}$ avec le pgcd$\{n : P(Y = n) > 0\} = 1$. Calculer $\lim_{n\to\infty} P(\exists k > 0 : Y_1 + \cdots + Y_k = n)$.

Suggestion : considérer une CM $X_n = (\inf\{m \geq n : m = Y_1 + \cdots + Y_k \text{ pour un } k \geq 0\} - n)$ et appliquer le Thm sur la convergence vers la loi stationnaire qui se généralise pour les CM sur E dénombrable de la façon suivante. *Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une CM irréductible, apériodique, et au moins pour un état $i \in E$ le temps moyen de retour dans cet état est fini : $\mathbf{E}_i T^i < \infty$. Alors il existe une loi de probabilité stationnaire μ avec $\mu_i = 1/\mathbf{E}_i T^i > 0$ pour tout $i \in E$. Pour toute loi initiale on a $\mathbf{P}(X_n = i) \to \mu_i$ quand $n \to \infty$.*