

MAT431 Equations différentielles

Raphaël KRIKORIAN

11 octobre, 2011

Plan du cours 9

- 1 Le théorème de la variété stable
- 2 Théorème de Hartman-Grobman
- 3 Régularité et Chaos
 - L'exemple du pendule forcé périodiquement
 - Bifurcation des séparatrices, intersections homoclines
 - La naissance du chaos
 - Hiérarchies imbriquées

Sommaire du cours 9

- 1 Plan cours 9
- 2 Le théorème de la variété stable
- 3 Théorème de Hartman-Grobman
- 4 Régularité et Chaos

Remarque :

- (1) Les versions actualisées des transparents, de l'énoncé du devoir, de sa correction et le sujet de l'an dernier (avec sa correction) sont disponibles à l'adresse :
<http://www.mathematiques.polytechnique.edu/accueil/enseignement/cycle-polytechnicien/annee-2/support-pedagogique-mat-431-7583.kjsp?RH=1254312611509>

- 1 Plan cours 9
- 2 Le théorème de la variété stable
- 3 Théorème de Hartman-Grobman
- 4 Régularité et Chaos

Théorème (de la variété stable)

Soit $x_0 = 0$ un point fixe **hyperbolique** d'un champ de vecteurs X de classe C^k ($k \geq 1$) et tel que $\Gamma_s \neq \{0\}$ (resp. $\Gamma_u \neq \{0\}$)

- i) Il existe alors un $\delta > 0$ et une application w_s (resp. w_u) de classe C^k d'un voisinage V_s (resp. V_u) de $0 \in \Gamma_s$ (resp. Γ_u) dans un voisinage de $0 \in \Gamma_u$ (resp. de $0 \in \Gamma_s$) tels que $W_\delta^s(x_0)$ (resp. $W_\delta^u(x_0)$) est le graphe de l'application w_s (resp. w_u) :

$$W_\delta^*(x_0) = \{x_* + w_*(x_*), x_* \in V_*\}, \quad * = s, u.$$

En outre $T_{x_0} W_\delta^* = \Gamma_*$.

- ii) Pour tout $x \in W_\delta^s(x_0)$ et tout $0 \leq \rho < \tilde{\rho} := \min_{\lambda \in \text{Spec}(DX(x_0))} (|\Re \lambda|)$ on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\rho t} \|\phi_X^t(x)\| = 0.$$

Théorème de la variété stable

On rappelle que les espaces stable et instable ($\lambda \in \text{Spec}(DX(x_0))$) sont

$$\Gamma_s(x_0) = \bigoplus_{\Re \lambda < 0} \Gamma_\lambda(DX(x_0)), \quad \Gamma_u(x_0) = \bigoplus_{\Re \lambda > 0} \Gamma_\lambda(DX(x_0))$$

et que comme x_0 est hyperbolique

$$\mathbb{R}^n = \Gamma_s \oplus \Gamma_u.$$

Ce théorème garantit donc, dans le cas **hyperbolique**, la **non vacuité** des variétés stables et instable (pourvu que E_s, E_u soient non vides) et montre que la stabilité **topologique** d'une orbite entraîne sa stabilité **asymptotique**.

Théorème de la variété stable : preuve (hors programme)

Démonstration Ecrivons pour commencer

$$X(x) = DX(0) \cdot x + G(x),$$

où $G : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est C^k et telle que $G(0) = 0$ et $DG(0) = 0$:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall v \in \mathbb{R}^n, \|v\| \leq \delta \implies \|DG(v)\| \leq \epsilon$$

Comme $DX(0)$ est hyperbolique, on sait qu'il existe des normes $\|\cdot\|_{s,u}$ (dites adaptées) sur les espaces stable et instable $\Gamma_{s,u}(DX(0))$ (qui sont A -invariants) et un $0 < \tilde{\rho} < \min\{|\Re \lambda| : \lambda \in \text{Spec}(DX(0))\}$ tels que

$$\forall v \in \Gamma_s, \forall t > 0, \|e^{tA} v\|_s \leq e^{-t\tilde{\rho}} \|v\|_s$$

$$\forall v \in \Gamma_u, \forall t < 0, \|e^{tA} v\|_u \leq e^{-|t|\tilde{\rho}} \|v\|_u$$

Théorème de la variété stable : preuve (hors programme)

[Par exemple : $\|v\|_s = \int_0^\infty e^{t\tilde{\rho}} \|e^{tA_s} v\| dt$ où $\|\cdot\|$ est n'importe quelle norme.] On notera

$$\|x\| = \max(\|x_s\|_s, \|x_u\|_u).$$

Théorème de la variété stable : preuve (hors programme)

Nous noterons G_s et G_u les composantes de G sur Γ_s, Γ_u et A_s, A_u les restrictions de A à Γ_s, Γ_u .

L'équation différentielle

$$x'(t) = X(x(t)) \tag{1}$$

est équivalente (utiliser la formule de variation de la constante) au système

$$\begin{aligned} x_u(t) &= e^{tA_u} x_u(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A_u} G_u(x_u(\tau), x_s(\tau)) d\tau \\ x_s(t) &= e^{tA_s} x_s(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A_s} G_s(x_u(\tau), x_s(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Théorème de la variété stable : preuve (hors programme)

Introduisons pour $0 \leq \rho < \tilde{\rho}$:

- $\mathcal{E}_{s,u}^\rho = \{x \in C^0([0, \infty), \Gamma_{s,u} \cap U) : \sup_{t \geq 0} e^{\rho t} \|x(t)\|_{s,u} < \infty\}$
- $\|x(\cdot)\|_{*,\rho} = \sup_{t \geq 0} e^{\rho t} \|x(t)\|_* : (\mathcal{E}_*^\rho, \|\cdot\|_{r,*})$ ($* = s, u$) est un Banach.
- $\Phi : \mathcal{E}_u^\rho \times \mathcal{E}_s^\rho \times V_s \rightarrow \mathcal{E}_u^\rho \times \mathcal{E}_s^\rho$, qui à $(x_u, x_s, z) \in \mathcal{E}_u^\rho \times \mathcal{E}_s^\rho \times V_s$ associe $(\tilde{x}_u, \tilde{x}_s) \in \mathcal{E}_u^\rho \times \mathcal{E}_s^\rho$ défini par ($t \geq 0$)

$$\tilde{x}_u(t) = - \int_t^\infty e^{(t-\tau)A_u} G_u(x_u(\tau), x_s(\tau)) d\tau \tag{2}$$

$$\tilde{x}_s(t) = e^{tA_s} z + \int_0^t e^{(t-\tau)A_s} G_s(x_u(\tau), x_s(\tau)) d\tau. \tag{3}$$

Théorème de la variété stable : preuve (hors programme)

Remarque Si $\Phi(x_s, x_u, z) = (x_s, x_u)$ alors

$$\begin{aligned} x_u(0) &= - \int_0^\infty e^{-\tau A_u} G(x_u(\tau), x_s(\tau)) d\tau \\ x_s(0) &= z, \end{aligned}$$

et un calcul simple montre que

$$\begin{aligned} x_u(t) &= e^{tA_u} x_u(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A_u} G_u(x_u(\tau), x_s(\tau)) d\tau \\ x_s(t) &= e^{tA_s} x_s(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A_s} G_s(x_u(\tau), x_s(\tau)) d\tau, \end{aligned}$$

Théorème de la variété stable : preuve (hors programme)

On a alors trouvé des valeurs $x_u(0)$, $x_s(0) = z$ pour lesquelles la solution de (1) ayant pour condition initiale $x(0) = (x_u(0), x_s(0))$ converge vers 0 exponentiellement vite quand t tend vers l'infini.

Réciproquement, si $(x_u(\cdot), x_s(\cdot))$ est une solution de (1) telle que $x_s(0) = z$ qui converge exponentiellement vite vers 0, alors $(x_u(\cdot), x_s(\cdot), z)$ est un point fixe de Φ .

Comme on va le voir l'ensemble des $(x_s(0), x_u(0))$ pour lesquels cela a lieu est le graphe d'une fonction $x_s(0) \mapsto x_u(0)$.

Théorème de la variété stable : preuve (hors programme)

On montre que $\Phi : \mathcal{E}_u^\rho \times \mathcal{E}_s^\rho \times V_s \rightarrow \mathcal{E}_u^\rho \times \mathcal{E}_s^\rho$ est dérivable.

Théorème de la variété stable : preuve (hors programme)

L'application Φ est (uniformément en z) contractante sur

$\mathcal{B}_\delta := \{(x_u, x_s) \in \mathcal{E}_u^\rho \times \mathcal{E}_s^\rho : \|(x_u, x_s)\|_\rho \leq \delta\}$ et envoie ce voisinage dans lui-même : par exemple pour la [contraction](#) :

$$\|\tilde{x}_u(t) - \tilde{y}_u(t)\|_u \leq \int_t^\infty e^{-|t-\tau|\tilde{\rho}} \|DG_u(\xi_1(\tau))\| \|x(\tau) - y(\tau)\| d\tau \quad (4)$$

$$\|\tilde{x}_s(t) - \tilde{y}_s(t)\|_s \leq \int_0^t e^{-|t-\tau|\tilde{\rho}} \|DG_s(\xi_2(\tau))\| \|x(\tau) - y(\tau)\| d\tau. \quad (5)$$

où $\xi_{1,2}(\cdot)$ sont dans \mathcal{B}_δ : comme $DG(0) = 0$ on a $\|DG(\xi_i(\tau))\| \leq C\epsilon$ et

$$e^{t\rho} \|x(t) - y(t)\| \leq C\epsilon \max(\tilde{\rho}^{-1}, (\tilde{\rho} - \rho)^{-1}) \|x - y\|_\rho$$

Théorème de la variété stable : preuve (hors programme)

Pour ϵ assez petit, Φ est bien contractante. Le théorème du [point fixe de Picard](#) à paramètre montre l'existence d'un point fixe unique $(x_u(z, \cdot), x_s(z, \cdot))$ pour Φ qui dépend de façon C^k de z . L'application qui à $z = x_s(z, 0)$ associe

$$x_u(z, 0) = - \int_0^\infty e^{-\tau A_u} G(x_u(z, \tau), x_s(z, \tau)) d\tau$$

est bien C^k .

On a donc démontré que l'ensemble des $(x_s(0), x_u(0))$ pour lesquels $(x_s(\cdot), x_u(\cdot)) \in \mathcal{E}_s^\rho \times \mathcal{E}_u^\rho$ est le graphe \mathcal{G}_ρ d'une fonction C^k .

Remarquons que l'on peut aussi choisir $\rho = 0$, ce qui démontre que l'ensemble des $(x_s(0), x_u(0))$ pour lesquels $(x_s(t), x_u(t))$, $t \geq 0$ qui restent dans un voisinage de 0, est aussi un graphe \mathcal{G}_0 ; d'après l'unicité, $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_\rho$ (sur un voisinage de 0).

- 1 Plan cours 9
- 2 Le théorème de la variété stable
- 3 Théorème de Hartman-Grobman
- 4 Régularité et Chaos

Deuxième problème : la conjugaison à la partie linéaire :

En général, on ne peut pas conjuguer X à sa partie linéaire par un difféomorphisme C^1 .

En revanche, on peut conjuguer par un homéomorphisme, les flots de $X(\cdot)$ et de $DX(x_0)$.

Théorème de Hartman-Grobman

Théorème (Hartman-Grobman)

Si x_0 est un point fixe *hyperbolique* de $X(\cdot)$ alors il existe un voisinage U de x_0 et un homéomorphisme h de U sur son image qui conjugue les flots de $X(\cdot)$ et de $DX(x_0)$: partout où ceci a un sens

$$h \circ \phi_X^t(x) = e^{tDX(x_0)} \cdot h(x).$$

Théorème de Hartman-Grobman

Nous allons démontrer un théorème global :

Théorème

Soient $A \in M(n, \mathbb{R})$ une matrice hyperbolique et $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que $G(0) = 0$ (0 est donc un point fixe hyperbolique de $x \mapsto X(x) = Ax + G(x)$). Alors, il existe $\delta > 0$ tel que la condition $\|G(\cdot)\|_{C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} \leq \delta$, assure l'existence d'un homéomorphisme ψ de \mathbb{R}^n tel que

$$h \circ \phi_X^t(x) = e^{tA} \cdot h(x).$$

Théorème de Hartman-Grobman : preuve (hors programme)

Démonstration : On a

$$x_u(t) = e^{tA_u} x_u(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A_u} G_u(x_u(\tau), x_s(\tau)) d\tau$$

$$x_s(t) = e^{tA_s} x_s(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A_s} G_s(x_u(\tau), x_s(\tau)) d\tau.$$

et on définit pour $z = (z_s, z_u)$ l'application

$$\begin{aligned} \psi(z) &= z + H(z) \\ &= z + \left(\begin{array}{l} -\int_0^\infty e^{\tau A_s} G_s(\phi_X^{-\tau}(z)) d\tau \\ \int_0^\infty e^{-\tau A_u} G_u(\phi_X^\tau(z)) d\tau \end{array} \right) \end{aligned}$$

(ϕ^t est le flot de X).

Théorème de Hartman-Grobman : preuve (hors programme)

On voit que ψ est bien définie sur \mathbb{R}^n . En outre :

- (i) ψ est **continue** car les intégrales sont absolument convergentes (G est bornée) et que $\phi_X^\tau(\cdot)$ est continue pour tout τ (on applique alors le théorème de continuité sous le signe somme).
- (ii) ψ **conjugue** les flots de X et $DX(0)$ comme nous allons le voir.
- (iii) En revanche, il n'est pas clair que ψ soit un **homéomorphisme** de \mathbb{R}^n (on pourrait facilement voir qu'elle est injective).

Théorème de Hartman-Grobman : preuve (hors programme)

Vérifions le point (ii) (la conjugaison).

Pour $T \in \mathbb{R}$ calculons

$$\psi(\phi^T(z)) = \phi^T(z) + \left(\begin{array}{l} -\int_0^\infty e^{\tau A_s} G_s(\phi^{T-\tau}(z)) d\tau \\ \int_0^\infty e^{-\tau A_u} G_u(\phi^{T+\tau}(z)) d\tau \end{array} \right),$$

où on a utilisé le fait que $\phi^{\pm\tau}(\phi^T(z)) = \phi^{\pm\tau+T}(z)$. Ainsi après changements de variables

$$\psi(\phi^T(z)) = \phi^T(z) + \left(\begin{array}{l} -e^{TA_s} \int_{-T}^\infty e^{\tau A_s} G_s(\phi^{-\tau}(z)) d\tau \\ e^{TA_u} \int_T^\infty e^{-\tau A_u} G_u(\phi^\tau(z)) d\tau \end{array} \right)$$

$$\psi(\phi^T(z)) =$$

$$\left(\begin{array}{l} e^{TA_s} z_s + \int_0^T e^{(T-\tau)A_s} G_s(\phi^\tau(z)) d\tau - e^{TA_s} \int_{-T}^\infty e^{\tau A_s} G_s(\phi^{-\tau}(z)) d\tau \\ e^{TA_u} z_u + \int_0^T e^{(T-\tau)A_u} G_u(\phi^\tau(z)) d\tau + e^{TA_u} \int_T^\infty e^{-\tau A_u} G_u(\phi^\tau(z)) d\tau, \end{array} \right)$$

Théorème de Hartman-Grobman : preuve (hors programme)

et après un autre changement de variable on voit que

$$\begin{aligned} \psi(\phi^T(z)) &= \left(\begin{array}{l} e^{TA_s} (z_s + \int_0^\infty e^{\tau A_s} G_s(\phi^{-\tau}(z)) d\tau) \\ e^{TA_u} (z_u + \int_0^\infty e^{-\tau A_u} G_u(\phi^\tau(z)) d\tau) \end{array} \right) \\ &= e^{TDF(0)} \psi(z), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Théorème de Hartman-Grobman : preuve (hors programme)

Comment démontrer que ψ est un homéomorphisme (point (iii)) ?
Essayons de résoudre l'équation de conjugaison

$$\forall t \in \mathbb{R}, \phi_X^t \circ \theta = \theta(e^{tA}x)$$

où on cherche $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et de la forme $\theta(x) = x + K(x)$ où $K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et bornée sur \mathbb{R} .

En se rappelant que $\phi_X^t(x) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-\sigma)A} G(\phi_X^\sigma(x)) d\sigma$ on voit que

$$e^{tA}x + e^{tA}K(x) + \int_0^t e^{(t-\sigma)A} G(\phi^\sigma(\theta(x))) d\sigma = e^{tA}x + K(e^{tA}x).$$

Théorème de Hartman-Grobman : preuve (hors programme)

Des manipulations semblables aux précédentes montrent que cette dernière condition est suffisante.

Théorème de Hartman-Grobman : preuve (hors programme)

On doit donc avoir

$$K_u(x) = - \int_0^t e^{-\sigma A} G_u(\phi^\sigma(\theta(x))) d\sigma + e^{-tA} K_u(e^{tA}x)$$
$$K_s(e^{tA}x) = e^{tA_s} K_s(x) + \int_0^t e^{(t-\sigma)A} G_s(\phi^\sigma(\theta(x))) d\sigma$$

ou encore (en composant à gauche dans la dernière équation par $e^{-tA}x$, en utilisant $\phi_X^t \circ \theta = \theta(e^{tA}x)$, en faisant un changement de variable dans la dernière équation et en faisant $t \rightarrow \infty$)

$$K_u(x) = - \int_0^\infty e^{-\sigma A_u} G_u(e^{\sigma A}x + K(e^{\sigma A}x)) d\sigma$$
$$K_s(x) = \int_0^\infty e^{\tau A_s} G_s(e^{-\tau A}x + K(e^{-\tau A}x)) d\tau$$

Théorème de Hartman-Grobman : preuve (hors programme)

On procède alors comme d'habitude : on introduit l'espace de Banach \mathcal{E} des fonctions $K = (K_s, K_u) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continues et bornées (muni de la norme du sup) et Φ l'application qui à (K_s, K_u) associe

$$\tilde{K}_u(x) = - \int_0^\infty e^{-\sigma A_u} G_u(e^{\sigma A}x + K(e^{\sigma A}x)) d\sigma$$
$$\tilde{K}_s(x) = \int_0^\infty e^{\tau A_s} G_s(e^{-\tau A}x + K(e^{-\tau A}x)) d\tau$$

En utilisant le fait que G est borné, on voit que Φ envoie \mathcal{E} dans lui-même, et en exploitant le fait que G est de norme Lipschitzienne petite, on voit que Ψ est contractante pourvu que $\delta = \|G\|_{C^1}$ soit suffisamment petite.

Théorème de Hartman-Grobman : preuve (hors programme)

Il existe donc un unique point fixe (K_s, K_u) de Ψ .

C'est cette **unicité** qui permet de conclure que ψ est un **homéomorphisme**.

En effet : on pourrait démontrer de la même manière qu'il existe un unique f de la forme $I + L$ avec L continue bornée telle que $f \circ \phi_A^t = \phi_A^t \circ f$ (resp. $f \circ \phi_X^t = \phi_X^t \circ f$) qui doit donc être $I + L = Id$.

Revenant à ψ et θ :

$$(\psi \circ \theta) \circ \phi_A^t = \psi \circ \phi_X^t \circ \theta = \phi_A^t \circ (\psi \circ \theta)$$

et

$$(\theta \circ \psi) \circ \phi_X^t = \theta \circ \phi_A^t \circ \psi = (\theta \circ \psi) \circ \phi_X^t.$$

Comme ψ et θ sont de la forme $I + H$ où H est continue bornée, il en est de même de $\psi \circ \theta$ et $\theta \circ \psi$. L'unicité montre que

$$\psi \circ \theta = \theta \circ \psi = Id.$$

Théorème de Hartman-Grobman : preuve (hors programme)

Pour démontrer le théorème local : l'idée est de faire un "zoom" au voisinage de 0 sur X (conjugaison par dilatation) de façon que le nouveau champ de vecteurs ressemble beaucoup à $DX(0)$ et de prolonger à l'infini par $DX(0)$.

Sommaire du cours 9

1 Plan cours 9

2 Le théorème de la variété stable

3 Théorème de Hartman-Grobman

4 Régularité et Chaos

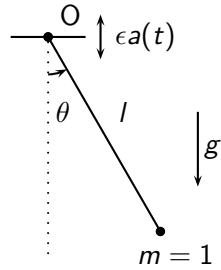
- L'exemple du pendule forcé périodiquement
- Bifurcation des séparatrices, intersections homoclines
- La naissance du chaos
- Hiérarchies imbriquées

Régularité et Chaos : l'exemple du pendule forcé périodiquement

Nous nous proposons d'illustrer sur un exemple simple, le pendule forcé de façon périodique, un phénomène que l'on retrouve très souvent en dynamique : la coexistence

- de mouvements "réguliers" d'une part : par exemple des mouvements quasi-périodiques
- et de mouvements "chaotiques" d'autres part : qui se comportent un peu comme une suite de variables aléatoires indépendantes.

Le modèle



Il s'agit de l'équation

$$\ddot{\theta}(t) + \omega^2(t) \sin(\theta(t)) = 0 \quad \omega_\epsilon(t) = \sqrt{\frac{g + \epsilon \ddot{a}(t)}{l}}$$

Le modèle

ou

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} = F_\epsilon \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}(t) \\ -\omega_\epsilon^2(t) \sin(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

où $\omega_\epsilon(\cdot)$ est T -périodique : $\omega_\epsilon(\cdot + T) = \omega_\epsilon(\cdot)$ et ϵ est **petit**.
Ecrivons pour simplifier $\omega_\epsilon(\cdot) = \omega_0 + \epsilon f_\epsilon(\cdot)$.

Le modèle

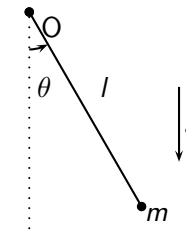
On écrit l'EDO précédente sous la forme

$$z'(t) = F_\epsilon(t, z(t))$$

où $z = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$ et on note $\Phi_\epsilon^{t,0}$ le flot de 0 à t .

Laissons le système évoluer pendant le temps T : l'application bijective $\Phi_\epsilon^{T,0}$ de \mathbb{R}^2 dans lui même ainsi obtenue est le *flot* au temps T

Le pendule sans frottement : $\epsilon = 0$



$$\ddot{\theta}(t) + \omega^2 \sin(\theta(t)) = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Le pendule sans frottement : $\epsilon = 0$

En observant que l'énergie mécanique du système est conservée

$$E = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \omega^2(1 - \cos \theta)$$

on peut tracer le **portrait de phase**

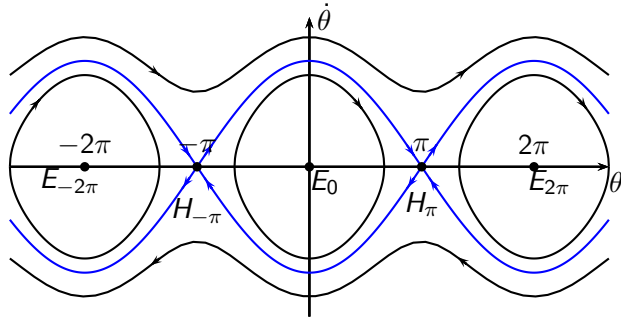


FIGURE: Le pendule

Le pendule sans frottement : $\epsilon = 0$

On observe

- deux types de mouvements :
 - Des mouvements **périodiques**
 - Des mouvements qui ont un comportement **asymptotique** simple (ceux sur la séparatrice en bleu).
- Des objets géométriques (des courbes ou des points) **invariants** par la dynamique qui feuilletent l'espace des phases.

Le pendule sans frottement : $\epsilon = 0$

Etude locale

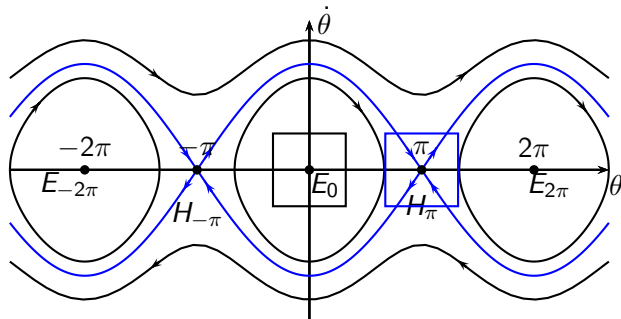


FIGURE: Le pendule

Le pendule sans frottement : $\epsilon = 0$

Etude locale

Au voisinage de E_0 (point fixe **elliptique**) : on a $\sin \theta \approx \theta$ d'où $\ddot{\theta} + \omega^2 \theta \approx 0$

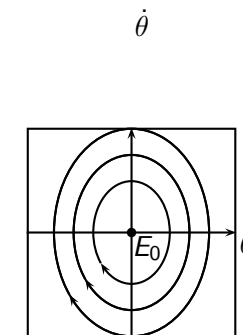


FIGURE: Au voisinage de E_0

Le pendule sans frottement : $\epsilon = 0$

Etude locale

Au voisinage de H_π (point fixe **hyperbolique**) on a $\sin(\theta - \pi) \approx -\theta$ d'où $\ddot{\theta} - \omega^2\theta \approx 0$.

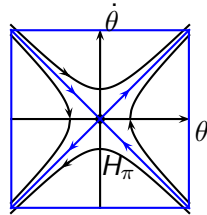


FIGURE: Au voisinage de H_π

Le pendule sans frottement : $\epsilon = 0$

Etude locale

Attention : Les périodes des orbites périodiques au voisinage de E_0 ne sont plus constantes.

Flot au temps T du pendule sans frottement

Si $\epsilon = 0$: $P_1 = \Phi_{\epsilon=0}^T(P_0)$; $P_2 = (\Phi_{\epsilon=0}^T)^2(P_0) = \Phi_{\epsilon=0}^T(P_1)$ etc.

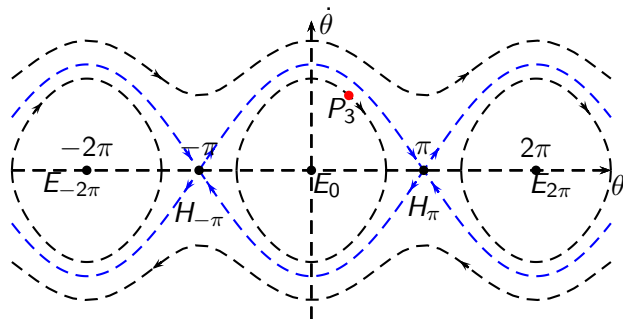


FIGURE: Dynamique de $\Phi_{\epsilon=0}^T$

- Les objets géométriques invariants par la dynamique **en temps discret** de $\Phi_{\epsilon=0}^T$ sont en traits discontinus en tirets et couvrent tout l'espace des phases.
- Ce sont les mêmes objets invariants que pour l'EDO.

Le pendule forcé périodiquement

Etude locale

Si $\epsilon \neq 0$, Φ_ϵ^T est une perturbation de Φ_0^T :

- que reste-t-il du dessin précédent global ?
- au voisinage de E_0 et H_π ?

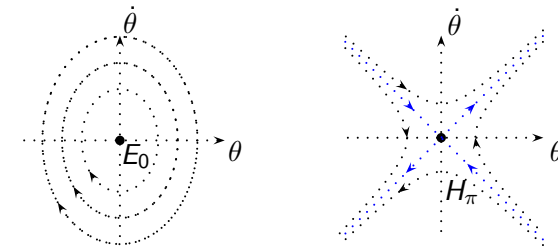


FIGURE: Au voisinage de E_0 et H_π

Le pendule forcé périodiquement : Etude locale au voisinage de E_0 pour $\Phi_\epsilon^{T,0}$ quand $\epsilon \neq 0$

On peut démontrer qu'au voisinage de E_0 :

- (a) Il existe des **courbes fermées invariantes** (qui sont des déformations des “ellipses” invariantes pour $\Phi_{\epsilon=0}^T$).
- (b) Ces courbes ne couvrent pas tout l'espace des phases (au voisinage de E_0) mais un ensemble de **mesure de Lebesgue positive**. Il s'agit du fameux et difficile **Théorème K.A.M.** dû à Kolmogorov, Arnold et Moser.
- (c) Les mouvements proches de l'origine sont **stables** (ne s'échappent pas) : c'est une conséquence de b). En outre, la plupart de ces mouvements sont **quasi-périodiques**.

Le pendule forcé périodiquement : Etude locale au voisinage de H_π pour $\Phi_\epsilon^{T,0}$ quand $\epsilon \neq 0$

On peut démontrer qu'au voisinage de H_π :

- (a) Il existe des **objets géométriques invariants** (**variétés stable et instable locales**) par Φ_ϵ^T semblables aux courbes bleues précédentes
- (b) La dynamique de Φ_ϵ^T ressemble beaucoup (“est topologiquement conjuguée”) à la dynamique de $\Phi_{\epsilon=0}^T$. C'est le **Théorème de Hartman-Grobman**.
- (c) Le point d'équilibre H_π reste **instable**.

Le pendule forcé périodiquement

La dynamique du pendule forcé périodiquement est, y compris au voisinage des points E_0 et H_π , beaucoup plus riche que ce que nous venons de décrire. De nouveaux phénomènes (en contraste avec le cas du pendule simple) apparaissent : en particulier la **coexistence**, de mouvements **réguliers** (**quasi-périodiques**) et de mouvement **chaotiques**.

C'est une question ouverte (qui vaut une médaille Fields) de savoir si cette dichotomie est valable sur un ensemble de mesure de Lebesgue pleine de l'espace des phases.

Nous décrivons à présent le phénomène à l'origine de la naissance du “chaos”.

Le pendule forcé périodiquement : bifurcation des séparatrices, intersections homoclines

Que deviennent les variétés stable et instable de H_π d'un point de vue **global** ?

Alors qu'elles coïncidaient pour Φ_0^T , on peut démontrer que ce n'est plus le cas pour $\Phi_\epsilon^{T,0}$: on dit qu'il y a naissance d'une **intersection homocline**. C'est ce phénomène qui est à la base de la **naissance du chaos**.

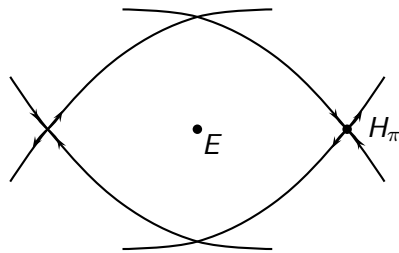


FIGURE: Intersection homocline

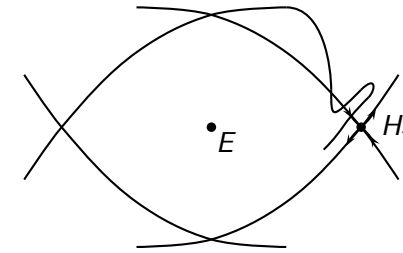


FIGURE: Conséquence d'une intersection homocline

L'histoire ne s'arrête pas là.

Revenons à la situation quasi-périodique.

Nous avons vu qu'il existait un ensemble de mesure positive de courbes invariantes entourant E_0 , mais que ces courbes ne couvraient pas tout un voisinage de E_0 .

Les courbes invariantes pour Φ_0^T dont le "nombre de rotation" n'est pas "suffisamment irrationnel" ne persistent en général pas après perturbation. Elles laissent cependant des traces. Ainsi, on peut démontrer l'existence de points périodiques de toutes périodes pour $\Phi_\epsilon^{T,0}$.

- Ces points périodiques sont de deux types
 - (i) Des points périodiques **elliptiques**
 - (ii) Des points périodiques **hyperboliques**
- Au voisinage des points périodiques elliptiques, on peut démontrer que tous les phénomènes précédemment décrit se répètent.
- Les points périodiques hyperboliques ont en général des variétés stables et instables qui ont une intersection homocline et répètent le paradigme "chaotique".
- D'où la situation suivante : on a **coexistence**, à des **échelles** de plus en plus petites de zones où la dynamique est **régulière** (i.e. quasi-périodique) et de zones où elle est **"chaotique"** (intersections homoclines)