**Lycée Condorcet** **2015-2016**
**MPSI2**

Feuille d'exercices 1

# Théorie des ensembles, première partie

**1** ☞ On considère trois assertions $A$, $B$ et $C$.

1) Montrer que l'implication logique est transitive : $[(A \implies B) \text{ et } (B \implies C)] \implies (A \implies C)$.
2) Montrer $(A \implies B) \implies [(C \implies A) \implies (C \implies B)]$.
3) Les assertions $A \implies (B \implies C)$ et $(A \implies B) \implies C$ sont-elles équivalentes ?

**2** Vous voulez acheter un billet de loterie. Le buraliste, logicien à ses heures perdues, vous présente cinq billets numérotés de 1 à 5 et vous déclare :

(i) si 5 est perdant, alors 1 est gagnant
(ii) si 4 est perdant, alors 2 est gagnant
(iii) si 3 est perdant, alors 5 aussi
(iv) si 1 est gagnant, alors 2 aussi
(v) si 3 est gagnant, alors 4 est perdant

Quel billet choisissez-vous ?

**3** Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrire à l'aide de symboles logiques les assertions suivantes :

1) Pour que $x$ soit supérieur ou égal à 1, il faut que $x$ soit supérieur à 2.
2) Pour que $x$ soit supérieur ou égal à 1, il suffit que $x$ soit supérieur à 2.
3) Pour que $x$ soit supérieur ou égal à 1, il faut que $x$ soit différent de 1.

Pour quelles valeurs de $x$ ces assertions sont-elles vraies ?

**4** **Problème de Freundenthal.** Anita a deux nouveaux amis, Inès et Simon. Elle leur a donné de minces indices pour qu'ils trouvent la date de son anniversaire ; elle leur dit que celle-ci se trouve parmi les dix dates suivantes :

les 15, 16 et 19 mai, les 17 et 18 juin, les 14 et 16 juillet, les 14, 15 et 17 août.

Anita a ensuite dit à Inès le mois et à Simon le jour de son anniversaire.

1. Inès affirme alors : « Je ne sais pas quand est l'anniversaire d'Anita mais je sais que Simon ne sait pas non plus. »
2. Simon ajoute : « Au départ, je ne savais pas quand était l'anniversaire d'Anita, mais maintenant je sais. »
3. Inès répond : « Alors je sais aussi quand est l'anniversaire d'Anita. »

Arriverez-vous vous aussi à déterminer la date de l'anniversaire d'Anita ?

**5** ☞ Écrire la négation des propositions suivantes :

1) $\forall (x,y) \in G^2,\ xy = yx$.
2) $\exists x \in G,\ \forall y \in G,\ xy = yx$.
3) $\forall (a,b) \in A^2,\ ab = 0 \implies (a = 0 \text{ ou } b = 0)$.
4) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in \mathbb{R},\ |x-y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.
5) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Le sens de toutes ces assertions sera clair plus tard. Il est important de savoir les nier pour les raisonnements par l'absurde et par contraposée.

**6** ☞ Soit $A(x,y)$ une assertion dépendant de deux variables $x$ et $y$. Montrer que l'une des propositions suivantes implique la seconde :

(i) $\exists x,\ \forall y,\ A(x,y)$
(ii) $\forall y,\ \exists x,\ A(x,y)$

Prouver à l'aide d'un contre-exemple que l'implication réciproque est fausse. Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ ne commutent donc pas : attention à la syntaxe ! En revanche, on peut écrire indifféremment $\forall x,\ \forall y,\ A(x,y)$ ou $\forall y,\ \forall x,\ A(x,y)$, et de même avec le quantificateur existentiel.

**7** Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ où $I$ est un intervalle. Écrire à l'aide de symboles mathématiques les phrases suivantes ainsi que leur négation :

1) $f$ n'est pas de signe constant sur $I$.
2) $f$ est majorée sur $I$.

**8** Soit $E$ un ensemble, $P(x)$ et $Q(x)$ des assertions de l'élément $x \in E$. Les équivalences suivantes sont-elles vraies ?

1) $[\forall x \in E, (P(x) \text{ et } Q(x))] \iff [(\forall x \in E, P(x)) \text{ et } (\forall x \in E, Q(x))]$ ;
2) $[\exists x \in E, (P(x) \text{ et } Q(x))] \iff [(\exists x \in E, P(x)) \text{ et } (\exists x \in E, Q(x))]$ ;
3) $[\forall x \in E, (P(x) \text{ ou } Q(x))] \iff [(\forall x \in E, P(x)) \text{ ou } (\forall x \in E, Q(x))]$ ;
4) $[\exists x \in E, (P(x) \text{ ou } Q(x))] \iff [(\exists x \in E, P(x)) \text{ ou } (\exists x \in E, Q(x))]$.

**9** Soit $x$ et $y$ des réels. Écrire les négations des assertions suivantes :

1) $A : \quad 0 < x \leqslant 1$ ;
2) $B : \quad xy = 0$ ;
3) $C : \quad x^2 = 1 \implies x = 1$.

**10** Soit $E$ un ensemble, $A$ $B$ et $C$ trois parties de $E$. Simplifier les expressions suivantes (si $F \subset E$, $\overline{F}$ désignera le complémentaire de $F$ dans $E$) :

1) $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ ;
2) $A \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.

**11** ☞ Soit $E$ un ensemble, $A$, $B$ et $C$ trois parties de $E$. Montrer les équivalences ou implications suivantes :

1) $(A \cup B = E) \iff (\overline{B} \subset A)$ ;
2) $(A \cap B = \emptyset) \iff (A \subset \overline{B})$ ;
3) $(A \cup B = A \cap B) \iff (A = B)$ ;
4) $(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \implies (B \subset C)$ ;
5) $(A \cup B = A \cup C \text{ et } A \cap B = A \cap C) \implies (B = C)$.

**12** Soit $E$ un ensemble, $A$ et $B$ deux parties de $E$. Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ les trois équations suivantes :

$$(E_1) \quad X \cup A = B; \qquad (E_2) \quad X \cap A = B; \qquad (E_3) \quad X \setminus A = B.$$

**13** Soit $E$ un ensemble, $A$ et $B$ deux parties de $E$. Résoudre l'équation : $(A \cap X) \cup (B \cap \overline{X}) = \emptyset$ ($\overline{X}$ désignant le complémentaire de $X$ dans $E$).

**14** Soit $E$ un ensemble et $A$ et $B$ deux parties de $E$.

1) Montrer que $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$, que $A \subset B \iff \mathbb{1}_A \leqslant \mathbb{1}_B$, puis que $A = B \iff \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.
2) Exprimer $\mathbb{1}_{\overline{A}}$ ($\overline{A}$ désigne le complémentaire de $A$ dans $E$) en fonction de $\mathbb{1}_A$.

**15** Soit $A$ et $B$ deux parties d'un ensemble $E$, $F$ un ensemble non vide, $f : A \longrightarrow F$ et $g : B \longrightarrow F$ deux applications. À quelle condition existe-t-il $h : A \cup B \longrightarrow F$ telle que $h|_A = f$ et $h|_B = g$ ?

**16** ☞ Soit $f : E \longrightarrow F$ et $A \subset E$, $B \subset F$. Montrer $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

**17** ☞ On considère l'application $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{|x|+1} \end{array}$.

1) Déterminer $f(\mathbb{R})$.
2) Soit $g$ l'application induite par $f$, c'est-à-dire $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & f(\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.
   Démontrer que $g$ est bijective et expliciter l'application réciproque $g^{-1}$.

**18** ☞ Soit $f : n \in \mathbb{N} \longmapsto 2n \in \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ qui à $n$ dans $\mathbb{N}$ associe $n/2$ si $n$ est pair, et $(n-1)/2$ si $n$ est impair.

1) Étudier la surjectivité et l'injectivité de $f$ et $g$.
2) Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$.

**19** Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$, $F$ étant supposé non vide.

1) Vérifier l'équivalence des deux propositions suivantes :
   (i) $f$ est injective ;
   (ii) il existe $g \in \mathcal{F}(F,E)$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
2) Vérifier l'équivalence des deux propositions suivantes :
   (i) $f$ est surjective ;
   (ii) il existe $g \in \mathcal{F}(F,E)$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

**20** Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$ et $G$ un ensemble. On suppose que $G$ a au moins deux éléments.

1) Vérifier l'équivalence des propositions suivantes :
   (i) $f$ est surjective ;
   (ii) pour tout couple $(g,h)$ de $\mathcal{F}(F,G)$, $g \circ f = h \circ f \implies g = h$.
2) Vérifier l'équivalence des propositions suivantes :
   (i) $f$ est injective ;
   (ii) pour tout couple $(g,h)$ de $\mathcal{F}(G,E)$, $f \circ g = f \circ h \implies g = h$.

**21** Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$. Montrer les équivalences :

1) $f$ injective $\iff \forall E' \subset E,\ f^{-1}(f(E')) = E'$
2) $f$ surjective $\iff \forall F' \subset F,\ f(f^{-1}(F')) = F'$

**22** ☞ Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

1) Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $F$, et $B \subset F$. Vérifier les égalités suivantes :
   a) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ ;
   b) $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$ ;
   c) $E \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(F \setminus B)$.
2) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $E$, et $A \subset E$. Vérifier les égalités suivantes :
   a) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ ;
   b) si $f$ est injective et $I$ non vide, $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ ;
   c) si $f$ est bijective $F \setminus f(A) = f(E \setminus A)$.

**23** **Théorème de Cantor.** Soit $E$ un ensemble et $f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$. Montrer que si $A = \{x \in E,\ x \notin f(x)\}$, alors $A \notin f(E)$. En conclure qu'il n'existe pas de surjection de $E$ sur $\mathcal{P}(E)$.

**24** Soit $E$ un ensemble, $A$ et $B$ deux parties de $E$. On considère $f : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$.

1) Montrer que $f$ est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f$ soit injective.
3) On suppose ici $f$ bijective. Exhiber $f^{-1}$.

**25** Soit $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$ des applications. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, il en va de même pour $f$, $g$ et $h$.

**26** **Lemmes de factorisation.** Soit $E$, $F$ et $G$ trois ensembles.

1) Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow G$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : F \longrightarrow G$ telle que $g = h \circ f$ si et seulement si
$$\forall (x,x') \in E^2, \quad f(x) = f(x') \implies g(x) = g(x').$$
2) Soit $g : E \longrightarrow G$ et $h : F \longrightarrow G$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $f : E \longrightarrow F$ telle que $g = h \circ f$ si et seulement si
$$\forall x \in E, \quad \exists y \in F, \quad g(x) = h(y).$$

**27** ☞ Soit $(X_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de parties d'un ensemble $E$.
Comparer $\bigcap\limits_{i\in I}\bigcup\limits_{j\in J} X_{i,j}$ et $\bigcup\limits_{j\in J}\bigcap\limits_{i\in I} X_{i,j}$, puis montrer que $\bigcap\limits_{i\in I}\bigcup\limits_{j\in J} X_{i,j} = \bigcup\limits_{f\in\mathcal{F}(I,J)}\bigcap\limits_{i\in I} X_{i,f(i)}$.

**28** ★ Soit $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux familles de parties d'un ensemble $E$, indexées par un même ensemble $I$. Montrer l'égalité :

$$\bigcap_{X\in\mathcal{P}(I)}\left(\bigcup_{i\in X} A_i \cup \bigcup_{j\in I\setminus X} B_j\right) = \bigcup_{i\in I}(A_i\cap B_i).$$

**29** On va montrer par récurrence sur $n \geqslant 2$ que $n$ points distincts quelconques du plan sont toujours alignés. C'est évidemment vrai pour $n = 2$. Supposons le résultat vrai au rang $n$ et donnons nous $n+1$ points distincts $A_1,\ A_2,\dots,A_{n+1}$ dans le plan. Par hypothèse de récurrence les points $A_1,\ A_2,\dots,A_n$ sont sur une même droite, de même que les points $A_2,\dots,A_{n+1}$. Or les deux droites sont égales car elles contiennent $A_2$ et $A_3$ qui sont distincts. Il en résulte que $A_1,\ A_2,\dots,A_{n+1}$ sont alignés, ce qui termine la récurrence. Qu'est-ce qui ne va pas ?!

**30** Montrer par récurrence que $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$. Essayer d'en trouver une preuve « géométrique ».

**31** ☞ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de $\mathbb{N}$. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geqslant n$.

**32** Montrer par récurrence les formules suivantes (et les retenir car elles interviennent souvent) :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

**33** ☞ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, 7 divise $3^{2n+1}+2^{n+2}$.

**34** Soient $x\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que si $p$ divise $x^2-x$, alors $p$ divise aussi $x^n-x$.

**35** Montrer que pour tous $m$, $n$ et $r$ entiers positifs ou nuls $m+n$ divise $m^{2r+1}+n^{2r+1}$.

**36** Montrer que, pour $n\geqslant 2$, $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ est le quotient d'un nombre impair et d'un nombre pair (procéder par récurrence).

**37** ☞ On considère l'application $f:\mathbb{R}^*\longrightarrow\mathbb{R}$, donnée par $f(x)=\exp\left(\frac{1}{x}\right)$. On admet que $f$ est infiniment dérivable sur son domaine de définition. Démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n\frac{P_n(x)}{x^{2n}}\exp\left(\frac{1}{x}\right),$$

où $P_n$ est un polynôme à coefficients réels dont on précisera le degré et le coefficient dominant.

**38** Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ : $1!\,3!\,\cdots\,(2n+1)!\geqslant((n+1)!)^{n+1}$.