**Université Pierre et Marie Curie** Probabilités : 3M290
**Année 2016-2017**

# Devoir Maison

À rendre la semaine du 18 avril

**Exercice 1.**
Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoire réelles indépendantes, de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{P}(\text{il existe une infinité de } n \text{ tel que } X_n \geq k) = 1$.
2. En déduire que p.s. $\limsup_{n\to\infty} X_n = +\infty$.
   On pose $Y_n := \prod_{i=1}^n X_i$.
3. Que vaut $\mathbb{E}[Y_n]$ ?
4. Montrer que $\mathbb{E}[\sqrt{X_1}] = \sqrt{\pi}/2$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}[\sqrt{Y_n}]$.
5. Montrer que, pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(Y_n \geq t) \leq \frac{1}{\sqrt{t}}(\sqrt{\pi}/2)^n$.
6. En déduire que p.s. $\lim_{n\to\infty} Y_n = 0$.

**Exercice 2.**
Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de copies indépendantes d'une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$, d'espérance nulle et de variance unité. On notera $S_n := \sum_{1\leq i\leq n} X_i$ les sommes partielles et $\Phi_Y$ la fonction caractéristique d'une variable aléatoire $Y$.

1. Montrer que l'on a, lorsque $x \to 0$, $\Phi_X(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. En déduire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la limite $\lim_{n\to\infty} \Phi_{S_n}(\frac{t}{\sqrt{n}})$.
2. Montrer que l'on a, pour tout $n$,
$$\mathbf{1}_{\{S_n=0\}} = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} e^{itS_n}dt$$
3. En déduire que
$$\sqrt{n}\,\mathbb{P}(S_n = 0) = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\sqrt{n}\pi,\sqrt{n}\pi]} \Phi_{S_n}(\frac{t}{\sqrt{n}})dt$$
4. Faire une conjecture sur un équivalent de $\mathbb{P}(S_n = 0)$ quand $n$ tend vers l'infini.
5. On suppose que les $X_i$ sont à valeur dans $\{-1, 1\}$, avec $\mathbb{P}(X = +1) = \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}$. Calculer $\mathbb{P}(S_n = 0)$, en distingant selon la parité de $n$. En déduire un équivalent de $\mathbb{P}(S_n = 0)$ quand $n$ tend vers l'infini (toujours suivant la parité de $n$). Qu'en est-il de la conjecture ?

*La conjecture vient du fait qu'on a envie de faire converger l'intégrale la question 3, ce qui n'est pas toujours vrai...*

**Exercice 3.**
Des catastrophes se produisent aux temps $T_1, T_2, \ldots$ On suppose que les durées $(T_{i+1} - T_i)_{i\geq 1}$ qui s'écoulent entre deux catastrophes successives sont indépendantes et de même loi, et que cette loi est intégrable. On appelle $N_t = \text{card}\{n : T_n \leq t\}$ le nombre de catastrophes qui se sont produites au temps $t$.

1. Montrer que $N_t \to \infty$ p.s.
2. Montrer que $\frac{N_t}{t}$ converge presque sûrement vers $\frac{1}{\mathbb{E}[T_1]}$.

**Exercice 4.**
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées de loi uniforme sur $[0,1]$. On note $M_n = \max_{1\leq k\leq n} X_k$ et $N_n = \min_{1\leq k\leq n} X_k$.

1. Montrer que $M_n$ converge en probabilité vers 1.
2. Montrer que $N_n$ converge en norme $L_2$ vers 0.
3. Montrer que $n(1-M_n)$ converge en loi vers une exponentielle de paramètre 1.

**Exercice 5.** *(Autour de la loi exponentielle)*

1. Soit $U$ une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer la loi de $E = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$, pour $\lambda > 0$.
2. Soit $X$ une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda$. Démontrer que la variable aléatoire $Y = \lfloor X \rfloor$ (où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière) suit une loi géométrique.
3. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que la variable $\min_{1\leq i\leq n} X_i$ suit une loi exponentielle de paramètre $n\lambda$, puis que la variable $n \min_{1\leq i\leq n} X_i$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$.
4. Soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que $n \min_{1\leq i\leq n} U_i$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1.
5. Soit $\lambda > 0$. Pour tout entier $n > \lambda$, on fixe $(X_i^n)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $p_n = \frac{\lambda}{n}$. On considère alors la variable aléatoire $N_n = \frac{1}{n}\inf\{i \geq 1; X_i^n = 1\}$. Démontrer que la suite $(N_n)$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle de loi exponentielle de paramètre $\lambda$.