Corrigé du Partiel de Probabilités Approfondies
Octobre 2016

Correction de l'exercice 1. 1. On a $0 \leq C \leq 2 \cdot 2^\alpha \max(B^\alpha, 1)$, donc C est intégrable puisque B^α l'est. On applique le théorème du cours sur l'espérance conditionnelle d'une fonction de deux variables indépendantes sachant l'une d'elle. On obtient $E(C|B) = \varphi(B)$ avec pour $b \geq 0$,

$$\begin{aligned}\varphi(b) = E(2U(b+U^2)^\alpha) &= \int_0^1 2u(b+u^2)^\alpha \mathrm{d}u \\ &= \left[\frac{1}{\alpha+1}(b+u^2)^{\alpha+1}\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{(1+b)^{\alpha+1} - b^{\alpha+1}}{\alpha+1}\end{aligned}$$

Donc $E(C|B) = \frac{(1+B)^{\alpha+1} - B^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ p.s.

2. Si une telle décomposition existe, alors $E(W) = 0$. On devrait alors avoir

$$\mathrm{Cov}(X, X+2Y) = a\mathrm{Var}(X+2Y) + \underbrace{\mathrm{Cov}(W, X+2Y)}_{=0 \text{ par independance}}$$

Or $\mathrm{Cov}(X, X+2Y) = 1$ et $\mathrm{Var}(X+2Y) = \mathrm{Var}X + 4\mathrm{Var}(Y) = 5$ (aussi par independance de X et Y). Donc nécessairement, $a = \frac{1}{5}$, ce qui prouve l'unicité de a s'il existe. Réciproquement, $Z = X + 2Y$ et $W = \frac{4X}{5} - \frac{2Y}{5}$ sont des combinaisons linéaires de X et Y qui forment un vecteur gaussien centré, leur couple est aussi un vecteur gaussien centré. Le calcul ci-dessous montre que ces variables sont orthogonales, donc indépendantes dans le cas gaussien, et on a bien

$$X = \frac{X+2Y}{5} + \underbrace{\frac{4X-2Y}{5}}_{=W}.$$

On écrit alors $X = Z/5 + W$ et on utilise les propriétés de l'espérance conditionnelle, sachant que Z est trivialement $\sigma(Z)$-mesurable et W est indépendant de $\sigma(Z)$.

$$\begin{aligned}&E(X|Z) = E(Z/5 + W|Z) = Z/5 + E(W) = Z/5 \text{ p.s.} \\ &E(X^2|Z) = E((Z/5+W)^2|Z) = \frac{Z^2}{25} + 2\frac{Z}{5}E(W) + E(W^2) = \frac{Z^2}{25} + \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2. 1. S_n et M_n sont $\mathcal{F}_n$-mesurables (car des fonctions mesurables de $X_1, \ldots, X_n$) ; comme $|X_i| = 1$, $|S_n| \leq x+n$ et $|M_n| \leq (x+n)^2+n$, et sont donc tous les deux intégrables. Enfin, $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ avec S_n $\mathcal{F}_n$-mesurable et X_{n+1} indépendante de $\mathcal{F}_n$ donc comme $\mathbb{E}[X_{n+1}] = 0$

$$\mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = S_n + \mathbb{E}[X_{n+1}] = S_n \qquad p.s.$$

On aussi $S_{n+1}^2 = S_n^2 + 2S_n X_{n+1} + X_{n+1}^2$, donc comme S_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable et X_{n+1} indépendante de $\mathcal{F}_n$

$$\mathbb{E}[S_{n+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] = S_n^2 + 2S_n\mathbb{E}[X_{n+1}] + \mathbb{E}[X_{n+1}^2] = S_n^2 + 1 \qquad p.s.$$

ce qui donne $\mathbb{E}[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n$ p.s.

2. On a
$$\{T \leq n\} = \bigcup_{i=0}^{n} \big\{S_i = 0\big\} \cup \big\{S_i = N\big\} \quad \in \mathcal{F}_n\,,$$
ce qui montre que T est un temps d'arrêt.

3. On remarque qu'avoir A_m implique que soit $S_{mq} \leq 0$, soit $S_{(m+1)q} \geq N$ (car on a N "+1" consécutifs), c'est-à-dire qu'on a nécessairement $T \leq (m+1)q$. Pour que $T > qN$, il faut donc nécessairement qu'aucun des A_m pour $m \leq q-1$ ne soit réalisé, d'où $\{T > qN\} \subset \bigcap_{m=0}^{q-1} A_m^c$. On en déduit, par indépendance des A_m
$$\mathbb{P}(T > qN) \leq \prod_{m=0}^{q-1} \mathbb{P}(A_m) = \Big(1 - \big(\tfrac{1}{2}\big)^N\Big)^q.$$
On utilise que $\mathbb{P}(T > j) \leq \mathbb{P}(T > qN)$ pour tout $j \in \{qN+1, \ldots, (q+1)N\}$ pour avoir
$$\mathbb{E}[T] = \sum_{j \geq 0} \mathbb{P}(T > j) \leq \sum_{q=0}^{\infty} N\mathbb{P}(T > qN) \leq N \sum_{q \geq 0} \Big(1 - \big(\tfrac{1}{2}\big)^N\Big)^q < +\infty\,.$$
On en déduit que $T < +\infty$ p.s.

4. Comme $(S_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ est une martingale, $\mathbb{E}[S_{n\wedge T}] = \mathbb{E}[S_0] = x$ for all $n \geq 0$. De plus, $T < +\infty$ p.s. donc $S_{n\wedge T} \overset{n\to\infty}{\to} S_T$ p.s., et par convergence dominée (car $|S_{n\wedge T}| \leq N$ par définition de T), on obtient que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_{n\wedge T}] = \mathbb{E}[S_T]$. On a donc $\mathbb{E}[S_T] = x$, et comme $S_T \in \{0, N\}$, $x = \mathbb{E}[S_T] = N\mathbb{P}(S_T = N)$, d'où $\mathbb{P}(S_T = 0) = 1 - \mathbb{P}(S_T = N) = 1 - x/N$.

5. De même, $(M_{n\wedge T})_{n\geq 0}$ est une martingale, donc $\mathbb{E}[M_{n\wedge T}] = \mathbb{E}[M_0] = x^2$. Comme $T < +\infty$ p.s., $M_{n\wedge T} = S_{n\wedge T}^2 - n \wedge T \overset{n\to\infty}{\to} S_T^2 - T$ p.s. On domine alors $|M_{n\wedge T}| \leq S_{n\wedge T}^2 + n \wedge T \leq N^2 + T$, qui est intégrable (cf. question 3.), pour avoir par convergence dominée
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_{n\wedge T}] = \mathbb{E}[S_T^2] - \mathbb{E}[T] = x^2\,.$$
Comme $\mathbb{E}[S_T^2] = N^2\mathbb{P}(S_T = N) = xN$, on obtient $\mathbb{E}[T] = xN - x^2 = x(N-x)$.

Correction de l'exercice 3. 1. Par définition de l'espérance conditionelle, A_n est prévisible. On en déduit donc que le processus est adapté à la filtration. Puisque les X_k sont dans L^2, on en déduit que $\mathbb{E}\left((X_k - X_{k-1})^2 \mid \mathcal{F}_{k-1}\right)$ est dans L^1 (par définition de l'esperance conditionnelle). On en déduit que $A_n \in L^1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $X_n^2 - A_n \in L^1$. Il reste à demontrer que

$$\mathbb{E}((X_{n+1}^2 - A_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) \;=\; X_n^2 - A_n.$$

On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}((X_{n+1}^2 - A_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2 |\, \mathcal{F}_n) \;-\; \mathbb{E}(A_{n+1} - A_n |\, \mathcal{F}_n) \\ &+\; \mathbb{E}(X_n^2 - A_n |\, \mathcal{F}_n) \\ &+\; 2\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)X_n |\mathcal{F}_n)\end{aligned}$$

puisque A_n est prévisible, et donc $\mathbb{E}(A_{n+1} - A_n |\, \mathcal{F}_n) = A_{n+1} - A_n$. Il s'en suit que le premier terme à droite de l'égalité précédente s'annule. Finalement,

$$\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)X_n|\mathcal{F}_n) \;=\; X_n\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n) = 0$$

puisque (X_n) est une Martingale p.r. à $(\mathcal{F}_n)$. On a donc

$$\mathbb{E}((X_{n+1}^2 - A_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) \;=\; \mathbb{E}(X_n^2 - A_n |\, \mathcal{F}_n),$$

ce qui montre la propriété martinagle.
On en déduit que $(X_n^2 - A_n)$ est une martingale. En conséquence, on a :

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}(A_n).$$

Si X_n est bornée dans L^2, en combinant le lemme de Fatou et l'égalité précédante, on a :

$$\mathbb{E}(A_\infty) < \infty$$

et donc $\mathbb{P}(A_\infty < \infty) = 1$.

2. Puisque (X_n) est une Martingale, (X_n^2) est une sous-martingale positive (par Jensen). Par l'inégalité de Doob dans L^2, on en déduit :

$$\mathbb{E}(\sup_{m \le n} X_m^2) \le 4\mathbb{E}(X_n^2) = 4\mathbb{E}(A_n).$$

Puisque (A_n) est un processus croissant, on $A_n \le A_\infty$. On a donc

$$\mathbb{E}(\sup_{m \le n} X_m^2) \le 4\mathbb{E}(A_\infty).$$

On conclut par une application directe du thêorème de convergence monotone :

$$\mathbb{E}(\sup_{m} X_n^2) \le 4\mathbb{E}(A_\infty).$$

3. Il suffit de remarquer que

$$\{N_a = n\} \;=\; \{A_0 \leq a^2, \cdots, A_n \leq a^2, A_{n+1} > a^2\} \in \mathcal{F}_n$$

car (A_n) est prévisible.

4. Puisque N_a est un temps d'arrêt, $X_{n\wedge N_a}$ est une Martingale dans L^2 avec comme processus croissant associé $(A_{n\wedge N_a})$ (facile á demontrer). On applique alors (2) à cette martingale :

$$\mathbb{E}(\sup_m X^2_{m\wedge N_a}) \leq 4\mathbb{E}(A_{N_a}) \leq a^2.$$

On en déduit que pour tout a, $(X_{n\wedge N_a})$ converge p.s. et dans L^2.
$\{A_\infty < \infty\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{A_\infty < \infty\}$. Pour toutes realisations ω dans $\{A_\infty < k\}$, on remarque que $N_a(\omega) = \infty$ pour tout $a^2 > k$, et donc $X_{n\wedge N_a} = X_n$. D'après ce qui précède, on en déduit que (X_n) converge p.s.

5. Puisque f est décroissante et positive, elle est mesurable et bornée. Il est clair que (Y_n) est adapté à la filtration. Puisque (X_n) est dans L^2, on en déduit que $Y_n \in L^2$ pour tout n. D'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{m=1}^{n+1}(X_m - X_{m-1})f(A_m) \mid \mathcal{F}_n\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{m=1}^{n}(X_m - X_{m-1})f(A_m) \mid \mathcal{F}_n\right) \;+\; \mathbb{E}(f(A_n)(X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n)\\
&= \sum_{m=1}^{n}(X_m - X_{m-1})f(A_m) \;+\; A_n\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n) \mid \mathcal{F}_n)\\
&= Y_n.
\end{aligned}$$

où à la troisième ligne on utilise la prévisibilité de (A_n). D'autre part :

$$\begin{aligned}
B_n - B_{n-1} &= \mathbb{E}\left((X_n - X_{n-1})^2 f^2(A_n) \mid \mathcal{F}_n\right)\\
&= f^2(A_n)\mathbb{E}\left((X_n - X_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_n\right)\\
&= f^2(A_n)(A_n - A_{n-1})
\end{aligned}$$

et donc pour $n \geq 1$:

$$B_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} f^2(A_i)(A_i - A_{i-1})$$

6. Puisque f est positive et decroissante, on a

$$0 \leq B_n \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{[A_{i-1},A_i]} f^2(x)dx = \int_0^{A_n} f^2(x)dx.$$

Puisque $\int_{[0,\infty)} f^2 < \infty$, on a $B_\infty < \infty$, et d'après (4), la martingale (Y_n) converge.

7. Puisque f est decroissante et positive, et telle que $\int_{[0,\infty)} f^2 < \infty$, on en déduit que $f(A_n) \to 0$ sur $\{A_\infty = \infty\}$. On applique alors le lemme de Kronecker avec $a_n = f(A_n)$ et $b_n = X_n - X_{n-1}$.