Examen du 22 mai 2015

Durée : 2 heures.

Exercice 1. Dans les exemples suivants, dire lesquels ne sont pas des $\mathbb{R}$-arbres et justifier brièvement pourquoi :

a) Les représentations graphiques des lettres suivantes (dont le trait est supposé sans épaisseur) : A, B, C, D, E, F, G, H ;

b) Un disque, un cercle, un segment de droite, un point ;

c) $\bigcup_{n\geq 1} \Delta_{\frac{1}{n}}$,
où Δ_a désigne le segment de droite dont l'équation en polaires est $\{(\rho,\theta) : \rho \leq 1, \theta = a\}$;

d) Même question si $\Delta_a = \{(\rho,\theta) : \rho \leq a, \theta = a\}$.

Solution de l'exercice 1.

a) A, B, D ont des cycles, ce ne sont pas des arbres ;

b) Un disque et un cercle ne sont pas des arbres pour la même raison ;

c) $\bigcup_{n\geq 1} \Delta_{\frac{1}{n}}$ n'est pas un arbre car il n'est pas localement compact : la suite de points $(1, \frac{1}{n})$ n'a pas de limite ;

d) Cette fois $\bigcup_{n\geq 1} \Delta_{\frac{1}{n}}$ est bien un arbre.

Exercice 2. Soit Z la solution de l'EDS

$$dZ_t = rZ_t\,dt + \sqrt{\sigma Z_t}\,dB_t,$$

dont la loi conditionnelle à $Z_0 = x \geq 0$ est désignée par $\mathbb{P}_x$. On définit $J_t := \int_0^t Z_s\,ds$, dont on désigne la loi sous $\mathbb{P}_x$ par $P_x^{(t)}$.

a) i) Quel nom usuel porte la diffusion Z ?

ii) Montrer que $\mathbb{P}-$p.s. $J_\infty := \lim_{t\to\infty} J_t$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

b) i) Montrer que $P_x^{(t)}$ satisfait la propriété de branchement pour tout $t \leq \infty$.

ii) En déduire qu'il existe $\varphi(\lambda, t) \geq 0$ tel que

$$\mathbb{E}_x \exp(-\lambda J_t) = \exp(-x\varphi(\lambda, t)) \qquad t, \lambda \geq 0.$$

iii) (*question indépendante du reste*) Montrer que M est une martingale, où

$$M_t := \exp(-\lambda J_t - \varphi(\lambda, \infty) Z_t).$$

c) On cherche une équation aux dérivées partielles vérifiée par $\varphi(\lambda, t)$.

i) Donner l'expression de Qf, où f une fonction de classe C^2 et Q désigne le générateur infinitésimal de Z.

ii) Montrer que pour tout $\varepsilon \geq 0$,

$$\mathbb{E}_x \exp(-\lambda J_{t+\varepsilon}) = \mathbb{E}_x \exp(-\lambda J_\varepsilon - \varphi(\lambda, t) Z_\varepsilon)$$

iii) En notant $g_{\lambda,t}(x) = \mathbb{E}_x \exp(-\lambda J_t)$, montrer que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{g_{\lambda,t+\varepsilon}(x) - g_{\lambda,t}(x)}{\varepsilon} = Q g_{\lambda,t}(x) - \lambda x g_{\lambda,t}(x).$$

iv) En déduire que $t \mapsto \varphi(\lambda, t)$ est dérivable, et que

$$\frac{\partial \varphi(\lambda, t)}{\partial t} = r\varphi(\lambda, t) - \frac{\sigma}{2} \varphi(\lambda, t)^2 + \lambda.$$

Solution de l'exercice 2.

a) Diffusion de Feller.

b) On sait d'après le cours que $\mathbb{P}-$p.s. $\lim_{t \to \infty} Z_t = +\infty$ ou Z est absorbée en 0 en temps fini. Dans le premier cas, $J_\infty = +\infty$, et dans le deuxième cas, J_∞ existe et est fini puisque Z est à trajectoires continues p.s.

c) i) Il suffit d'utiliser la propriété de branchement de Z, ie l'égalité en loi $Z^{x+y} = Z^x + Z^y$, où Z^x et Z^y sont des copies indépendantes de Z issues respectivement de x et de y. Ainsi,

$$\int_0^t Z_s^{x+y}\, ds = \int_0^t (Z_s^x + Z_s^y)\, ds = \int_0^t Z_s^x\, ds + \int_0^t Z_s^y\, ds.$$

ii) On déduit de la question précédente que $x \mapsto \mathbb{E}_x \exp(-\lambda J_t)$ est un morphisme entre $(\mathbb{R}_+, +)$ et $([0,1], \times)$, d'où le résultat.

iii) Il suffit de voir que

$$M_t := \mathbb{E}[\exp(-\lambda J_\infty) | \mathscr{F}_t].$$

d) On cherche une équation aux dérivées partielles vérifiée par $\varphi(\lambda, t)$.

i) Soit Q le générateur de Z, ie

$$Qf(x) = rxf'(x) + \frac{\sigma}{2} x f''(x).$$

ii) Pour tout $\varepsilon \geq 0$,

$$\mathbb{E}_x[\exp(-\lambda J_{t+\varepsilon}) | \mathscr{F}_\varepsilon] \quad = \quad \exp(-\lambda J_\varepsilon) \mathbb{E}_{Z_\varepsilon}[\exp(-\lambda J_t)] \quad = \quad \exp(-\lambda J_\varepsilon) \exp(-\varphi(\lambda, t) Z_\varepsilon),$$

puis en prenant l'espérance

$$\mathbb{E}_x \exp(-\lambda J_{t+\varepsilon}) = \mathbb{E}_x \exp(-\lambda J_\varepsilon - \varphi(\lambda, t) Z_\varepsilon).$$

iii) En notant $g_{\lambda,t}(x) := \exp(-x\varphi(\lambda, t)) = \mathbb{E}_x \exp(-\lambda J_t)$, on a

$$g_{\lambda,t+\varepsilon}(x) \quad - \quad g_{\lambda,t}(x) \quad = \quad \mathbb{E}_x \left[e^{-\lambda J_\varepsilon} \left(e^{-\varphi(\lambda,t) Z_\varepsilon} - e^{-x\varphi(\lambda,t)} \right) + e^{-x\varphi(\lambda,t)} \left(e^{-\lambda J_\varepsilon} - 1 \right) \right]$$

Le membre de droite divisé par ε, converge lorsque $\varepsilon \to 0$, vers $Q g_{\lambda,t}(x) - \lambda x g_{\lambda,t}(x)$.

iv) Le résultat de la question précédente s'écrit

$$
\begin{aligned}
-x\frac{\partial \varphi(\lambda,t)}{\partial t}e^{-x\varphi(\lambda,t)} &= Qg_{\lambda,t}(x) - \lambda x g_{\lambda,t}(x) \\
&= rx(-\varphi(\lambda,t)e^{-x\varphi(\lambda,t)}) + \frac{\sigma}{2}x(\varphi(\lambda,t)^2 e^{-x\varphi(\lambda,t)}) - \lambda x e^{-x\varphi(\lambda,t)},
\end{aligned}
$$

ce qui donne le résultat demandé.

Exercice 3. Soit $T > 0$. Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $(0,\infty)$ telle que $\mathbb{P}(X \geq s) > 0$ pour tout $s \in [0,T]$, on notera F_X la fonction définie par

$$F_X(s) := \frac{1}{\mathbb{P}(X \geq s)} \qquad s \in [0,T].$$

On considère dans cet exercice un processus ponctuel de coalescence, abrégé CPP, d'âge T et dont les profondeurs des nœuds ont même loi qu'une variable aléatoire H à densité et à valeurs dans $(0,\infty)$ (telle que $\mathbb{P}(H \geq s) > 0$ pour tout $s \in [0,T]$). On dira qu'il s'agit d'un CPP(H).

a) Représenter une réalisation de ce CPP.

b) Soit N_T le nombre de feuilles de CPP(H). Montrer que N_T est géométrique et que $\mathbb{E}(N_T) = F_H(T)$.

c) On suppose que chaque feuille du CPP est conservée (par opposition aux autres qui sont supprimées) avec probabilité p, indépendamment.
Montrer que l'arbre engendré par les feuilles conservées est un CPP(A), où $F_A = 1 - p + pF_H$.
On pourra calculer $\mathbb{P}(A < s)$ *où* A *est le temps de coalescence entre deux feuilles échantillonnées consécutives.*

d) On suppose de manière plus générale que chaque nœud du CPP à la hauteur $T - t$ est conservé avec probabilité p, indépendamment, les autres nœuds à la hauteur $T - t$ étant supprimés avec toute leur descendance (le cas précédent s'obtient avec $t = 0$). Montrer que l'arbre engendré par les feuilles survivantes est un CPP(B), où

$$F_B(s) = \begin{cases} F_H(s) & \text{si } 0 \leq s \leq t \\ (1-p)F_H(t) + pF_H(s) & \text{si } t \leq s. \end{cases}$$

Pour chaque feuille survivante, on pourra distinguer selon que le temps de coalescence entre cette feuille et la suivante dans l'arbre initial, est plus petit ou plus grand que s.

Solution de l'exercice 3.

a) (...)

b) La probabilité de succès de la variable géométrique est $\mathbb{P}(H \geq T)$, ie

$$\mathbb{P}(N_T = n) = \mathbb{P}(H < T)^{n-1}\mathbb{P}(H \geq T) \qquad n \geq 1,$$

d'où $\mathbb{E}(N_T) = 1/\mathbb{P}(H \geq T) = F_H(T)$.

c) Entre chaque paire de feuilles successives échantillonnées, le temps de coalescence A est le maximum des profondeurs d'un nombre K de nœuds géométrique de paramètre de succès p :

$$A = \max(H_1, \ldots, H_K),$$

où K est indépendante des H_i, qui sont elles-mêmes des copies indépendantes de H. Ainsi,

$$\mathbb{P}(A < s) = \mathbb{E}\big(\mathbb{P}(H < s)^K\big) = \sum_{k \geq 1} (1-p)^{k-1} p \mathbb{P}(H < s)^k$$
$$= \frac{p\mathbb{P}(H < s)}{1 - (1-p)\mathbb{P}(H < s)} = \frac{p\mathbb{P}(H < s)}{\mathbb{P}(H \geq s) + p\mathbb{P}(H < s)},$$

d'où

$$\mathbb{P}(A \geq s) = 1 - \frac{p\mathbb{P}(H < s)}{\mathbb{P}(H \geq s) + p\mathbb{P}(H < s)} = \frac{\mathbb{P}(H \geq s)}{\mathbb{P}(H \geq s) + p\mathbb{P}(H < s)},$$

d'où

$$F_A(s) = \frac{1}{\mathbb{P}(A \geq s)} = \frac{\mathbb{P}(H \geq s) + p(1 - \mathbb{P}(H \geq s))}{\mathbb{P}(H \geq s)} = 1 - p + \frac{p}{\mathbb{P}(H \geq s)} = 1 - p + pF_H(s).$$

d) Soit H le temps de coalescence entre une feuille survivante et la feuille suivante dans l'arbre initial. Si $H < t$, alors $B = H$. Si $H > t$, alors

$$B = \max(H'_1, \ldots, H'_K),$$

où K est indépendante des H'_i, qui sont elles-mêmes des copies indépendantes de H conditionnée à être plus grande que t. Ainsi,

$$\mathbb{P}(B < s) = \mathbb{P}(H < t)\mathbb{P}(H < s | H < t) + \mathbb{P}(H \geq t)\mathbb{E}\big(\mathbb{P}(H' < s)^K\big)$$
$$= \mathbb{P}(H < s \wedge t) + \mathbb{P}(H \geq t)\frac{p\mathbb{P}(H' < s)}{1 - (1-p)\mathbb{P}(H' < s)},$$

ce qui s'exprime

$$\mathbb{P}(B < s) = \mathbb{P}(H < s \wedge t) + \mathbb{P}(H \geq t)\frac{p\mathbb{P}(H < s | H \geq t)}{1 - (1-p)\mathbb{P}(H < s | H \geq t)}.$$

Si $s \leq t$, on obtient donc $\mathbb{P}(B < s) = \mathbb{P}(H < s)$, d'où $F_B(s) = F_H(s)$, tandis que si $s \geq t$,

$$\mathbb{P}(B \geq s) = \mathbb{P}(H \geq t) - \mathbb{P}(H \geq t)\frac{p\mathbb{P}(H < s | H \geq t)}{1 - (1-p)\mathbb{P}(H < s | H \geq t)} = \frac{\mathbb{P}(H \geq s)}{1 - (1-p)\mathbb{P}(H < s | H \geq t)},$$

d'où

$$F_B(s) = \frac{1 - (1-p)\mathbb{P}(H < s | H \geq t)}{\mathbb{P}(H \geq s)} = \frac{p + (1-p)\mathbb{P}(H \geq s | H \geq t)}{\mathbb{P}(H \geq s)} = (1-p)F_H(t) + pF_H(s)$$