# INTÉGRALE STOCHASTIQUE

*Dans toute cette feuille, on considère un espace fitré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ sur lequel est défini un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}-$mouvement brownien réel $\{B_t\}_{t\geq 0}$.*

**Exercice 1** (Martingales locales).

1. La somme de deux martingales locales est-elle encore une martingale locale ?
2. Soit $\{M_t\}_{t\geq 0}$ une martingale locale continue. On suppose que pout tout $t \geq 0$,
$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq t} |M_s|\right] < \infty.$$
Montrer que $\{M_t\}_{t\geq 0}$ est en réalité une vraie martingale.
3. Soit $\{M_t\}_{t\geq 0}$ une martingale locale positive telle que $\mathbb{E}[M_0] < \infty$. Montrer que c'est une surmartingale, et que c'est une martingale si et seulement si $\forall t \geq 0, \mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0]$.

**Exercice 2** (Unicité de l'écriture d'un processus d'Itô). Étant donné $\psi \in M^1_{\mathrm{loc}}$, on pose
$$Z_t := \int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s \qquad (t \geq 0).$$

1. Vérifier que $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ est adapté.
2. Montrer que si $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ est une martingale, alors $\psi$ est nul $\mathbb{P} \otimes dt-$p.p.
3. Montrer que la conclusion reste vraie si l'on suppose seulement que $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ est une martingale locale. On pourra introduire une suite de temps d'arrêts bien choisie.
4. En déduire que l'écriture d'un processus d'Itô $\{X_t\}_{t\geq 0}$ sous la forme
$$X_t = X_0 + \int_0^t \phi(s)\mathrm{d}B_s + \int_0^t \psi(s)\mathrm{d}s,$$
avec $(\psi, \phi) \in M^1_{\mathrm{loc}} \times M^2_{\mathrm{loc}}$ est unique.

**Exercice 3** (Formule d'Itô). Dans chacun des cas suivants, montrer que $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ est un processus d'Itô, calculer sa différentielle stochastique, et déterminer si $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ est une martingale.

1. $Z_t = B_t + 4t$
2. $Z_t = B_t^2 - t$
3. $Z_t = t^2 B_t - 2\int_0^t sB_s\,\mathrm{d}s$
4. $Z_t = B_t^3 - 3tB_t$
5. $Z_t = B_t^2(B_t^2 - 6t)$
6. $Z_t = B_t\left(B_t^4 - 10tB_t^2 + 15t^2\right)$
7. $Z_t = \exp(\mu t + \sigma B_t)$, avec $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R}^2$.
8. $Z_t = (\cos B_t, \sin B_t)$

**Exercice 4** (Polarisation). Soient $\phi_1, \phi_2$ des éléments de $M^2$. Montrer que

$$\left\{\int_0^t \phi_1(s)\,\mathrm{d}B_s \int_0^t \phi_2(s)\,\mathrm{d}B_s - \int_0^t \phi_1(s)\phi_2(s)\,\mathrm{d}s\right\}_{t\geq 0}.$$

est une martingale. Que dire si $\phi_1, \phi_2$ sont seulement supposés dans $M^2_{\mathrm{loc}}$ ?

**Exercice 5** (Fonction du brownien). Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (f'(B_s))^2\,\mathrm{d}s\right] < \infty \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}\left[\int_0^t |f''(B_s)|\,\mathrm{d}s\right] < \infty.$$

1. Établir l'identité suivante, valable pour tout $t \geq 0$ :
$$\mathbb{E}[f(B_t)] = f(0) + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^t f''(B_s)\,\mathrm{d}s\right].$$
2. Retrouver la formule donnant les moments de la loi gaussienne.

**Exercice 6** (EDP). Soit $(t, x) \mapsto f(t, x)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ solution de l'EDP

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

1. Montrer que le processus $\{f(t, B_t)\}_{t\geq 0}$ est une martingale locale, et donner une condition suffisante sur $f$ pour que ce soit une vraie martingale.
2. Que dire de $\{B_t^3 - 3tB_t\}_{t\geq 0}$, $\{B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2\}_{t\geq 0}$ et $\{B_t^5 - 10tB_t^3 + 15t^2B_t\}_{t\geq 0}$ ?

**Exercice 7** (Pont brownien). Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère le processus $\{Z_t\}_{0\leq t<1}$ défini par

$$Z_t = a(1-t) + bt + (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s}\,\mathrm{d}B_s.$$

Montrer que $\{Z_t\}_{0\leq t<1}$ est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\mathrm{d}Z_t = \frac{b - Z_t}{1-t}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t.$$

**Exercice 8** (Cas vectoriel). Soit $\{(B_t, \widetilde{B}_t)\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien plan. Pour $t \geq 0$ on pose :

$$X_t := \exp(B_t)\cos(\widetilde{B}_t) \qquad \text{et} \qquad Y_t := \exp(B_t)\sin(\widetilde{B}_t).$$

1. Montrer que $\{X_t\}_{t\geq 0}$ et $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ sont des martingales de carré intégrable.
2. Le produit $\{X_tY_t\}_{t\geq 0}$ est-il une martingale ?
3. Calculer la différentielle stochastique du processus $\{Z_t\}_{t\geq 0}$ défini par
$$Z_t := (X_t - 1)^2 + (Y_t)^2.$$

**Exercice 9** (Carré de Bessel). Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un brownien $d-$dimensionnel. Montrer que $\{\|B_t\|^2\}_{t\geq 0}$ est un processus d'Itô et calculer sa différentielle stochastique.