Université Pierre et Marie Curie — 2013-2014
Probabilités et statistiques - LM345 — 6 novembre 2013

Contrôle continu.

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.

Exercice 1 Soient X_1, X_2, $\cdots$, X_{2013} des variables aléatoires réelles discrètes. On suppose que pour tout $1 \leq i \leq 2013$,

$$\mathbb{P}(X_i = i^2) = \frac{1}{i+2}, \qquad \mathbb{P}(X_i = -i^2) = \frac{1}{i+2}, \qquad \mathbb{P}(X_i = 0) = \frac{i}{i+2}\,.$$

On pose $Y := X_1 + \cdots + X_{2013}$. Déterminer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 2 **Vecteur aléatoires discrets...** Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X suit la loi de Poisson de paramètre λ et Y suit la loi de Poisson de paramètre μ. On rappelle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}.$$

a) Donner la loi du couple $Z = (X, Y)$.

b) Donner la loi de $X + Y$.

... et continus Soit $Z = (X, Y)$ un vecteur aléatoire admettant pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{2x^2 - 2xy + y^2}{2}\right).$$

a) On rappelle que la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ admet pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

$$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Quelle est la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-a)^2} dx$ pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque ?

b) Donner la loi de X.

c) Donner la loi de Y.

d) X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles de densité

$$f_{X,Y}(x, y) = \mathbf{1}_D(x, y)/\pi$$

où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ est le disque unité.

a) Donner la loi de X. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

b) Donner la loi de $R = (X^2 + Y^2)^{1/2}$ (on pourra calculer $\mathbb{P}(R \leq r)$ en utilisant que (X, Y) est de loi uniforme, c'est-à-dire que $\mathbb{P}((X, Y) \in A)$ est proportionnel à l'aire de A).