TD10. Convergence en loi

1. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X.

Vrai ou faux :

a) La suite $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $f(X)$.

b) Si les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X sont toutes intégrables, $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$.

2. Considérons une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_n > 0$. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Soit $Z_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

a) Calculer la fonction de répartition de Z_n, que l'on notera F_{Z_n}.

b) Montrer que pour tout t, $F_{Z_n}(t)$ converge vers un $F(t)$. F est-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire ? Si oui, identifier la loi de cette variable aléatoire.

c) Qu'a-t-on démontré sur la convergence de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoire réelles indépendantes et identiquement distribuées. On pose $M_n = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$.

a) On suppose que X_1 suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que la suite $(n(1 - M_n))_{n\geq 1}$ converge en loi et expliciter la loi limite.

b) On suppose que X_1 suit la loi de Cauchy. Montrer que la suite $(nM_n^{-1})_{n\geq 1}$ converge en loi et expliciter la loi limite.
Indication : $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ *quand* $x \to +\infty$.

4.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite indépendante de variables aléatoires réelles de même loi de Cauchy. Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Etudier les convergences en probabilité et en loi des suites $(\frac{1}{\sqrt{n}} S_n)_{n\geq 1}$, $(\frac{1}{n} S_n)_{n\geq 1}$ et $(\frac{1}{n^2} S_n)_{n\geq 1}$.

Indication : la fonction caractéristique de la loi de Cauchy est donnée par $\phi(t) = e^{-|t|}$.

5. Soient X une variable aléatoire réelle, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de variables aléatoires réelles.

a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$|\phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_{X_n}(t)| \leq 2\mathbb{P}(|Y_n| > a) + \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[0,a]}(|Y_n|)|e^{itY_n} - 1|].$$

b) Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers 0, alors la suite $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.

c) Montrer que la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers X n'implique pas la convergence en loi de $(X_n - X)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0.

6. Soit $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires réelles.

a) Montrer que s'il existe une constante $K > 0$ telle que $|X_n(\omega)| \leq K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\omega \in \Omega$, alors (X_n) converge en loi vers 0 si et seulement si (X_n) converge dans $\mathscr{L}^1$ vers 0.

b) Soit $c \in \mathbb{R}$ un réel, et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Montrer que si (X_n) converge en loi vers c, alors $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = f(c)$.