TD10. Convergence en loi

1. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire X.

Vrai ou faux :

a) La suite $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $f(X)$.

b) Si les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X sont toutes intégrables, $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$.

Solution de l'exercice 1.

a) C'est vrai. Tout d'abord, $f(X_n)$ est bien une variable aléatoire comme composée de la variable aléatoire X_n et de l'application f qui est continue. Si φ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue bornée, remarquons que $\varphi \circ f$ est également continue bornée. L'hypothèse de convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers X implique
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(\varphi \circ f)(X_n)] = \mathbb{E}[(\varphi \circ f)(X)]$$
que l'on peut écrire $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\varphi(f(X_n))] = \mathbb{E}[\varphi(f(X))]$. Ceci étant valable pour toute φ continue bornée, $(f(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $f(X)$.

b) C'est faux (la fonction identité n'est pas bornée, donc la définition de la convergence en loi ne garantit pas cette convergence). Comme contre-exemple, prenons X_n une variable aléatoire valant n avec probabilité $\frac{1}{n}$ et 0 avec probabilité $1 - \frac{1}{n}$. Alors X_n est bornée donc intégrable et $\mathbb{E}[X_n] = 1$. Par ailleurs, la suite X_n converge en loi vers la variable aléatoire $X = 0$, en effet, elle converge en probabilité : pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit,
$$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \frac{1}{n} \to_{n\to\infty} 0.$$
Pourtant, on n'a pas $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X] = 0$.

2. Considérons une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_n > 0$. On suppose que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. Soit $Z_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

a) Calculer la fonction de répartition de Z_n, que l'on notera F_{Z_n}.

b) Montrer que pour tout t, $F_{Z_n}(t)$ converge vers un $F(t)$. F est-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire ? Si oui, identifier la loi de cette variable aléatoire.

c) Qu'a-t-on démontré sur la convergence de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Solution de l'exercice 2.

a) On a $\{\lfloor X_n \rfloor = k\} = \{X_n \in [k, k+1)\}$, et $Z_n \in [0,1]$. Donc $\mathbb{P}(Z_n \leq t) = 0$ pour $t \leq 0$, et $\mathbb{P}(Z_n \leq t) = 1$ pour $t > 1$. Soit $t \in [0,1]$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_n \leq t) &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Z_n \leq t,\ \lfloor X_n \rfloor = k) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Z_n \leq t, X_n \in [k, k+1)) \\
&= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X_n \in [k, k+t]) = \sum_{k \geq 0} \lambda_n \int_k^{k+t} e^{-\lambda_n t} dt \\
&= \sum_{k \geq 0} \left(e^{-\lambda_n k} - e^{-\lambda_n (k+t)} \right) = \left(1 - e^{-\lambda_n t}\right) \sum_{k \geq 0} e^{-\lambda_n k} \\
&= \frac{1 - e^{-\lambda_n t}}{1 - e^{-\lambda_n}}.
\end{aligned}$$

b) Par le résultat précédent, pour tout $t \in [0,1]$,

$$F_{Z_n}(t) = \frac{\lambda_n t + O(\lambda_n^2)}{\lambda_n + O(\lambda_n^2)}$$

On obtient donc,

$$\lim_{n \to \infty} F_{Z_n}(t)) = t.$$

On trouve donc $F(t) = t$ sur $[0,1]$. Par ailleurs, pour $t \leq 0$ on a $F(t) = 0$, et pour $t \geq 1$, $F(t) = 1$. On reconnaît la fonction de répartition d'une variable uniforme dans $[0,1]$.

c) On a montré que Z_n converge en loi vers une variable uniforme dans $[0,1]$.

3. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoire réelles indépendantes et identiquement distribuées. On pose $M_n = \max\{X_1, \cdots, X_n\}$.

a) On suppose que X_1 suit la loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que la suite $(n(1 - M_n))_{n \geq 1}$ converge en loi et expliciter la loi limite.

b) On suppose que X_1 suit la loi de Cauchy. Montrer que la suite $(nM_n^{-1})_{n \geq 1}$ converge en loi et expliciter la loi limite.
Indication : $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ *quand* $x \to +\infty$.

Solution de l'exercice 3.

a) Pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire $n(1 - M_n)$ est à valeurs dans $[0, n]$. On a donc, pour tout $t < 0$, $P(n(1 - M_n) \leq t) = 0$. Soit $t \geq 0$. Pour tout $n \geq t$, on a :

$$\mathbb{P}(n(1-M_n) \leq t) = \mathbb{P}\left(M_n \geq 1 - \frac{t}{n}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(M_n < 1 - \frac{t}{n}\right) = 1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

Donc $\mathbb{P}(n(1 - M_n) \leq t) \to (1 - e^{-t})\mathbb{1}_{t \geq 0}$, et la fonction $t \mapsto (1 - e^{-t})\mathbb{1}_{t \geq 0}$ est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi, la suite $(n(1 - M_n))_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1.

b) Soit $t \leq 0$. On a :

$$\mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq t\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq 0\right) = \mathbb{P}(M_n \leq 0) = \frac{1}{2^n},$$

donc $\mathbb{P}(nM_n^{-1} \leq t) \to 0$ quand $n \to \infty$. Soit maintenant $t > 0$. On a :

$$\mathbb{P}(nM_n^{-1} \leq t) = \mathbb{P}(nM_n^{-1} \leq t, M_n > 0) + \mathbb{P}(M_n \leq 0).$$

D'après ce qui a été fait précédemment, $\mathbb{P}(M_n \leq 0) \to 0$. Et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq t, M_n > 0\right) &= \mathbb{P}\left(M_n \geq \frac{n}{t}\right) \\ &= 1 - \left(\int_{-\infty}^{\frac{t}{n}} \frac{dx}{\pi(1+x^2)}\right)^n \\ &= 1 - \frac{1}{\pi^n}\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{n}{t}\right)\right)^n \\ &= 1 - \frac{1}{\pi^n}\left(\pi - \frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\ &= 1 - \left(1 - \frac{t}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \\ &\to 1 - \exp\left(-\frac{t}{\pi}\right)\end{aligned}$$

quand $n \to \infty$. Ainsi, la suite $(nM_n^{-1})_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\frac{1}{\pi}$.

4.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite indépendante de variables aléatoires réelles de même loi de Cauchy. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Etudier les convergences en probabilité et en loi des suites $(\frac{1}{\sqrt{n}}S_n)_{n\geq 1}$, $(\frac{1}{n}S_n)_{n\geq 1}$ et $(\frac{1}{n^2}S_n)_{n\geq 1}$.

Indication : la fonction caractéristique de la loi de Cauchy est donnée par $\phi(t) = e^{-|t|}$.

Solution de l'exercice 4.

La fonction caractéristique de $\frac{1}{\sqrt{n}}S_n$ est donnée par

$$\phi(t) = \mathbb{E}[e^{\frac{it}{\sqrt{n}}S_n}] = \left(\mathbb{E}[e^{\frac{it}{\sqrt{n}}X_1}]\right)^n = e^{-|t|\sqrt{n}},$$

car les X_n sont indépendantes. Comme la suite $\left(e^{-|t|\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ tend vers $1_{\{0\}}(t)$ qui définit une fonction non continue en 0. Donc la limite des fonctions caractéristiques n'est pas une fonction caractéristique, et $(\frac{1}{\sqrt{n}}S_n)_{n\geq 1}$ ne converge ni en loi, ni en probabilité.

La fonction caractéristique de $\frac{1}{n}S_n$ est $\phi(t) = e^{-|t|}$. La suite $(\frac{1}{n}S_n)_{n\geq 1}$ converge donc en loi vers une variable aléatoire de loi de Cauchy. Mais elle ne converge pas en probabilité. En effet, sinon, la suite $(\frac{S_n}{n} - \frac{S_{2n}}{2n})_{n\geq 1}$ convergerait en probabilité, donc aussi en loi, vers 0. Or, la fonction caractéristique de $\frac{S_n}{n} - \frac{S_{2n}}{2n}$ est donnée par

$\phi(t) = \mathbb{E}[e^{\frac{it}{2n}(X_1+\cdots+X_n-(X_{n+1+\cdots+X_{2n}}))}] = e^{-|t|}$, qui ne converge pas vers 1, fonction caractéristique de la variable aléatoire 0.

La fonction caractéristique de $\frac{1}{n^2}S_n$ est $\phi(t) = e^{-\frac{|t|}{n}}$ qui converge vers 1. Ainsi, la suite $(\frac{1}{n^2}S_n)_{n\geq 1}$ converge en loi et donc en probabilité vers 0.

5. Soient X une variable aléatoire réelle, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de variables aléatoires réelles.

a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$|\phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_{X_n}(t)| \leq 2\mathbb{P}(|Y_n| > a) + \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[0,a]}(|Y_n|)|e^{itY_n} - 1|].$$

b) Montrer que si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers 0, alors la suite $(X_n + Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X.

c) Montrer que la convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers X n'implique pas la convergence en loi de $(X_n - X)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0.

Solution de l'exercice 5.

a) Pour tous $t \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}|\phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_{X_n}(t)| &= |\mathbb{E}[e^{itX_n}(e^{itY_n} - 1)]| \leq \mathbb{E}[|e^{itY_n} - 1|]\\ &= \int_{\{|Y_n|>a\}} |e^{itY_n} - 1|d\mathbb{P} + \int_{\{|Y_n|\leq a\}} |e^{itY_n} - 1|d\mathbb{P}\\ &\leq 2\mathbb{P}(|Y_n| > a) + \int_{\{|Y_n|\leq a\}} |e^{itY_n} - 1|d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

b) En fait, Y_n converge en probabilité vers 0. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $a_0 > 0$ tel que pour $y \leq a_0$, $|e^{ity} - 1| \leq \varepsilon$. De plus, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\mathbb{P}(|Y_n| > a_0) \leq \varepsilon$. Donc, $|\phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_{X_n}(t)| \leq 3\varepsilon$. La convergence en loi de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers X implique qu'il existe n_1 (que l'on peut prendre plus grand que n_0), tel que, pour tout $n \geq n_1$, $|\phi_{X_n}(t) - \phi_X(t)| \leq \varepsilon$. On a montré que pour tout $n \geq n_1$, $|\phi_{X_n+Y_n}(t) - \phi_X(t)| \leq 4\varepsilon$ d'où la convergence en loi demandée.

c) On prend X de loi symétrique (X a la même loi que $-X$), et on pose $X_n = -X$. Alors X_n converge en loi vers X, mais $X_n - X$ converge en loi vers $-2X$.

6. Soit $(X_n,\, n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires réelles.

a) Montrer que s'il existe une constante $K > 0$ telle que $|X_n(\omega)| \leq K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\omega \in \Omega$, alors (X_n) converge en loi vers 0 si et seulement si (X_n) converge dans $\mathscr{L}^1$ vers 0.

b) Soit $c \in \mathbb{R}$ un réel, et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Montrer que si (X_n) converge en loi vers c, alors $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = f(c)$.

Solution de l'exercice 6.

a) On sait que convergence dans $\mathscr{L}^1$ implique convergence en probabilité, a fortiori convergence en loi.

Montrons maintenant la partie "seulement si". Supposons que (X_n) converge en loi vers 0, ce qui équivaut, vu que la limite (qui est 0) est une constante, à dire que (X_n) converge en probabilité vers 0. Comme $K \in \mathscr{L}^1$, le théorème de convergence $\mathscr{L}^p$-dominée permet de voir que (X_n) converge dans $\mathscr{L}^1$ vers 0.

b) Un résultat du cours dit que convergence dans $\mathscr{L}^1$ implique convergence des espérances. Il suffit donc de prouver que $Y_n := f(X_n) - f(c)$ converge vers 0 $\mathscr{L}^1$.

Comme f est bornée, il existe une constante $M > 0$ telle que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $|Y_n(\omega)| \leq 2M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\omega \in \Omega$. D'après la question précédente, il suffit de prouver que Y_n converge vers 0 en probabilité ; autrement, il suffit de prouver que $(f(X_n))$ converge vers $f(c)$ en probabilité.

Par hypothèse, X_n converge en loi vers c. Vu que la limite est une constante, on déduit que la convergence a lieu également en probabilité. La continuité de f permet alors de conclure que $(f(X_n))$ converge vers $f(c)$ en probabilité (c'st un résultat du cours).