PARTIEL 13 novembre 2014
Calcul stochastique et processus de diffusion
M2 Probabilités et Modèles Aléatoires

Durée 2h.

Soit $(p_{s,t}(x,\cdot))$ un noyau de transition non-homogène de Feller sur $\mathbb{R}^d$. Un processus sur un espace filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$ est dit *markovien* avec noyau de transition $(p_{s,t}(x,\cdot))$ si pour toute $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}_+$ mesurable

$$\mathbb{E}(f(X_t) \,|\, \mathscr{F}_s) = P_{s,t} f(X_s) \qquad \text{p.s.}$$

où $P_{s,t} f(x) := \int f(y)\, p_{s,t}(x, dy)$.

Exercice 1. Soit $(B_t)_{t\in[0,1]}$ un mouvement brownien sur l'espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et soit $\mathscr{F}_t = \sigma(B_u, u \in [0,t])$.

(1) Montrer que

$$\Lambda(\alpha,\beta) := \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\alpha y - \frac{y^2}{2\beta}\right) dy = \sqrt{2\pi\beta}\, \exp\left(\frac{\alpha^2\beta}{2}\right), \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ \beta > 0.$$

(2) Soit $M_t := \frac{1}{\sqrt{1-t}} \exp\left(-\frac{B_t^2}{2(1-t)}\right)$, $t \in [0,1[$. Montrer que $(M_t)_{t\in[0,1[}$ est une $(\mathscr{F}_t)$-martingale.

(3) Montrer que $\mathbb{E}(B_s\, B_t\, M_T) = s(1-t)$ pour tous $0 \le s \le t \le T < 1$.

(4) Soit $T \in [0,1[$ fixé ; montrer que $\overline{\mathbb{P}}_T := M_T \mathbb{P}$, i.e.

$$\overline{\mathbb{P}}_T(A) := \mathbb{E}(\mathbb{1}_A\, M_T), \qquad A \in \mathscr{F},$$

définit une mesure de probabilité. Donner la loi du processus $(B_u, u \in [0,T])$ sous $\overline{\mathbb{P}}_T$.

(5) Que se passe-t-il quand $T \uparrow 1$?

Exercice 2. Soit $(B_t)_{t\ge0}$ un mouvement brownien et $X_t := e^{-t/2} B_{\exp(t)}$, $t \ge 0$.

(1) Calculer la fonction de covariance de X.

(2) Montrer que X est *stationnaire*, i.e. pour tout $t \ge 0$, $(X_{s+t}, s \ge 0)$ a même loi que X.

(3) Montrer que X est *réversible*, i.e. pour tout $t \ge 0$, $(X_{t-s}, s \in [0,t])$ et $(X_s, s \in [0,t])$ ont même loi.

(4) Montrer que $(X_t, t \ge 0)$ est markovien dans le sens précisé ci-dessus et calculer son noyau de transition.

Exercice 3. Soit $(B_t)_{t\ge0}$ un mouvement brownien et $S_t = \sup_{s\in[0,t]} B_s$. On rappelle que, par le principe de réflexion, la densité de (S_t, B_t) est donnée par

$$f_t(a,b) = \frac{2(2a-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2a-b)^2}{2t}\right) \mathbb{1}_{\{a>0,\, b<a\}}.$$

(1) Montrer que (S_t, B_t) est un processus Markovien dans le sens précisé ci-dessus et calculer son noyau de transition.

(2) Montrer que $S_t - B_t$ a même loi que $|B_t|$.

(3) Montrer que $2S_t - B_t$ a même loi que $|B_t^{(3)}|$, où $B^{(3)}$ est un MB dans $\mathbb{R}^3$.

(4) Montrer que, conditionnellement à $2S_t - B_t$, S_t et $S_t - B_t$ ont une loi uniforme sur $[0, 2S_t - B_t]$.

Corrigé

Solution de l'exercice 1. Soit $(B_t)_{t\in[0,1]}$ un mouvement brownien sur l'espace de probabilités $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et soit $\mathscr{F}_t = \sigma(B_u, u \in [0,t])$.

(1) Nous avons pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$

$$\alpha y - \frac{y^2}{2\beta} = -\frac{1}{2\beta}\,(y-\alpha\beta)^2 + \frac{\alpha^2\beta}{2}.$$

Donc

$$\Lambda(\alpha,\beta) = e^{\frac{\alpha^2\beta}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2\beta}\,(y-\alpha\beta)^2\right)\,dy = e^{\frac{\alpha^2\beta}{2}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\beta}\right)\,dy = \sqrt{2\pi\beta}\,e^{\frac{\alpha^2\beta}{2}}.$$

(2) Soit $M_t := \frac{1}{\sqrt{1-t}} \exp\left(-\frac{B_t^2}{2(1-t)}\right)$, $t \in [0,1[$. Nous écrivons pour $0 \le s \le t$

$$B_t^2 = (B_t - B_s + B_s)^2 = (B_t - B_s)^2 + B_s^2 + 2B_s(B_t - B_s).$$

Puisque $B_t - B_s$ est indépendant de $\mathscr{F}_s$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_t \,|\, \mathscr{F}_s) &= \frac{1}{\sqrt{1-t}} e^{-\frac{B_s^2}{2(1-t)}}\,\mathbb{E}\left(e^{-\frac{(B_t-B_s)^2+2B_s(B_t-B_s)}{2(1-t)}} \,|\, \mathscr{F}_s\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-t}}\, e^{-\frac{B_s^2}{2(1-t)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2+2B_s y}{2(1-t)}}\,\mathscr{N}(0, t-s)(\mathrm{d}y) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-t}}\, e^{-\frac{B_s^2}{2(1-t)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2(t-s)} - \frac{y^2+2B_s y}{2(1-t)}}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-t}}\, e^{-\frac{B_s^2}{2(1-t)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1-s}{2(t-s)(1-t)}y^2 - \frac{B_s y}{1-t}}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-t}}\, e^{-\frac{B_s^2}{2(1-t)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\,\Lambda\left(-\frac{B_s}{1-t}, \frac{(t-s)(1-t)}{1-s}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-s}}\, e^{-\frac{B_s^2}{2(1-t)}\left(1-\frac{t-s}{1-s}\right)} = M_s.
\end{aligned}$$

(3) Puisque M est une martingale et $B_s\,B_t$ est $\mathscr{F}_s$-mesurable, $\mathbb{E}(B_s\,B_t\,M_T) = \mathbb{E}(B_s\,B_t\,M_t)$; or

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(B_s\,B_t\,M_t) &= \mathbb{E}\left((B_s^2 + B_s(B_t - B_s))\,M_t\right) = \mathbb{E}\left(B_s^2\,M_t\right) + \mathbb{E}\left(B_s(B_t - B_s)\right)M_t) \\
&= \mathbb{E}\left(B_s^2\,M_s\right) + \mathbb{E}\left(B_s\,\mathbb{E}\left((B_t - B_s)\,M_t \,|\, \mathscr{F}_s\right)\right).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(B_s^2\,M_s\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s(1-s)}} \int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-\frac{y^2}{2s} - \frac{y^2}{2(1-s)}}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi s(1-s)}} \int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-\frac{y^2}{2s(1-s)}}\,\mathrm{d}y = s(1-s).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}((B_t - B_s)\, M_t \mid \mathscr{F}_s) &= \frac{1}{\sqrt{1-t}} e^{-\frac{B_s^2}{2(1-t)}}\, \mathbb{E}\left((B_t - B_s)\, e^{-\frac{(B_t-B_s)^2 + 2B_s(B_t-B_s)}{2(1-t)}} \mid \mathscr{F}_s \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-t}}\, e^{-\frac{B_s^2}{2(1-t)}} \int_{\mathbb{R}} y\, e^{-\frac{y^2+2B_s y}{2(1-t)}}\, \mathscr{N}(0, t-s)(\mathrm{d}y) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-t}}\, e^{-\frac{B_s^2}{2(1-t)}}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} y\, e^{-\frac{y^2}{2(t-s)} - \frac{y^2+2B_s y}{2(1-t)}}\, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-t}}\, e^{-\frac{B_s^2}{2(1-s)}}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} y\, e^{-\frac{1-s}{2(t-s)(1-t)}\left(y + B_s \frac{t-s}{1-s}\right)^2}\, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-s}}\, e^{-\frac{B_s^2}{2(1-s)}}\, \frac{\sqrt{1-s}}{\sqrt{2\pi(t-s)(1-t)}} \int_{\mathbb{R}} \left(y - B_s \frac{t-s}{1-s} \right)\, e^{-\frac{1-s}{2(t-s)(1-t)} y^2}\, \mathrm{d}y \\
&= -B_s \frac{t-s}{1-s} \frac{1}{\sqrt{1-s}}\, e^{-\frac{B_s^2}{2(1-s)}} = -\frac{t-s}{1-s} B_s M_s.
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\mathbb{E}\left(B_s(B_t - B_s)\right) M_t) = -\frac{t-s}{1-s} \mathbb{E}\left(B_s^2\, M_s\right)
$$

et finalement

$$
\mathbb{E}(B_s\, B_t\, M_t) = \mathbb{E}(B_s^2 M_t) \left(1 - \frac{t-s}{1-s} \right) = s(1-s) \frac{1-t}{1-s} = s(1-t).
$$

(4) Puisque $M_T \geq 0$ et $\mathbb{E}(M_T) = 1$, $\overline{\mathbb{P}}_T := M_T \mathbb{P}$ est clairement une mesure de probabilité. Pour donner la loi du processus $(B_u, u \in [0,T])$ sous $\overline{\mathbb{P}}$, nous remarquons d'abord que sous $\overline{\mathbb{P}}$ ce processus est gaussien car pour tous $0 < t_1 < \cdots < t_n \leq T$ la densité de $(B_{t_i}, i = 1, \ldots, n)$ est

$$
\frac{1}{\sqrt{1-t_n}}\, e^{-\frac{x_n^2}{2(1-t_n)}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} e^{-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}}
$$

qui est une densité gaussienne sur $\mathbb{R}^n$. Or $(B_u, u \in [0,T])$ sous $\overline{\mathbb{P}}_T$ est centré et sa fonction de covariance est la même que celle du pont brownien. La loi cherchée est donc celle du pont brownien sur $[0,T]$.

(5) Pour $t \leq T < 1$ la loi de $(B_u, u \in [0,t])$ sous $\overline{\mathbb{P}}_T$ est la loi du pont brownien sur $[0,t]$, qui ne dépend pas de T. Si la martingale $(M_T)_{T<1}$ était uniformément intégrable, elle aurait une limite M_1 dans L^1 quand $T \uparrow 1$ et la mesure $\overline{\mathbb{P}}_1 := M_1 \mathbb{P}$ serait la limite étroite de $\overline{\mathbb{P}}_T$; il en résulterait l'absolue continuité de la loi du pont brownien sur $[0,1]$ par rapport à la loi du mouvement brownien, ce qui est faux car le premier est p.s. égal à 0 au temps 1, un événement avec probabilité nulle pour le deuxième. Donc M_T ne peut pas converger dans L^1 ; on voit en effet que p.s. $M_T \to 0$ quand $T \uparrow 1$.

Solution de l'exercice 2. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien et $X_t := e^{-t/2} B_{\exp(t)}$, $t \geq 0$.

(1) La fonction de covariance de X est donnée par :

$$
\mathbb{E}(X_u X_t) = e^{-(t+u)/2} \mathbb{E}(B_{\exp(u)} B_{\exp(t)}) = e^{-(t+u)/2 + u \wedge t} = e^{-|t-u|/2}.
$$

(2) Comme X est un processus gaussien centré, sa loi est déterminée par sa fonction de covariance. $(X_{s+t}, s \geq 0)$ est aussi gaussien centré, et $\mathbb{E}(X_{s+u}X_{s+t}) = e^{-|t-u|/2}$. Puisque X et $(X_{s+t}, s \geq 0)$ ont la même fonction de covariance, ils ont la même loi. On pourrait aussi utiliser le scaling :

$$(e^{-(t+s)/2} B_{\exp(t)\exp(s)})_{t\geq 0} \overset{(d)}{=} (e^{s/2} e^{-(t+s)/2} B_{\exp(t)})_{t\geq 0} = (e^{-t/2} B_{\exp(t)})_{t\geq 0}.$$

(3) Même argument : $\mathbb{E}(X_{t-s}X_{t-u}) = e^{-|s-u|/2}$, ou

$$\begin{aligned}(e^{-(t-s)/2} B_{\exp(t)\exp(-s)})_{s\in[0,t]} &\overset{(d)}{=} (e^{t/2} e^{-(t-s)/2} B_{\exp(-s)})_{s\in[0,t]} = (e^{s/2} B_{\exp(-s)})_{s\in[0,t]} \\ &\overset{(d)}{=} (e^{-s/2} B_{\exp(s)})_{s\in[0,t]}\end{aligned}$$

où la dernière égalité suit du fait que $(uB_{1/u})_{u\geq 0}$ est un mouvement brownien.

(4) Ici $\mathscr{F}_s = \sigma(X_u, u \in [0,s]) = \sigma(B_r, \in [0, e^s]) =: \mathscr{F}^B_{e^s}$. Par la propriété de Markov du mouvement brownien, si $s \leq t$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X_t) \mid \mathscr{F}_s) = \mathbb{E}(f(e^{-t/2} B_{e^t}) \mid \mathscr{F}^B_{e^s}) &= \int_{\mathbb{R}} f(e^{-t/2} y)\, \mathscr{N}(B_{e^s}, e^t - e^s)(\mathrm{d}y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \mathscr{N}(e^{-t/2} X_s, 1 - e^{-(t-s)})(\mathrm{d}y).\end{aligned}$$

Le processus est donc markovien et son noyau de transition $p_{s,t}(x,\cdot) = \mathscr{N}(e^{-t/2}x, 1 - e^{-(t-s)})$, donc homogène en temps. Nous reconnaissons le noyau du processus de Ornstein-Uhlenbeck.

Solution de l'exercice 3. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et $S_t = \sup_{s\in[0,t]} B_s$.

(1) Ici $\mathscr{F}_s = \sigma((S_u, B_u), u \in [0,s]) = \sigma(B_u, u \in [0,s])$. Remarquons que

$$S_t = \sup_{u\in[0,t]} B_u = \left(\sup_{u\in[0,s]} B_u\right) \vee \left(\sup_{u\in[s,t]} (B_s + B_u - B_s)\right) = S_s \vee (B_s + S_{s,t})$$

où $S_{s,t} := \sup_{u\in[s,t]}(B_u - B_s)$ est indépendant de $\mathscr{F}_s$ et a même loi que S_{t-s}. Donc, si $\hat{B}$ est un mouvement brownien indépendant de B et $\hat{S}_t := \sup_{u\in[0,t]} \hat{B}_u$, alors (S_t, B_t) a même loi que

$$\left(S_s \vee (B_s + \hat{S}_{t-s}), B_s + \hat{B}_{t-s}\right).$$

Donc

$$\mathbb{E}(f(S_t, B_t) \mid \mathscr{F}_s) = \int_{\mathbb{R}^2} f(S_s \vee (B_s + a), B_s + b)\, f_{t-s}(a,b)\, \mathrm{d}a\, \mathrm{d}b.$$

Nous obtenons que (S_t, B_t) est un processus Markovien avec noyau de transition

$$\begin{aligned}p_{s,t}((x_1,x_2), \mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2) = &\delta_{x_1}(\mathrm{d}y_1)\, \mathrm{d}y_2 \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(a\leq x_1)} f_{t-s}(a - x_2, y_2 - x_2)\, \mathrm{d}a \\ &+ \mathbb{1}_{(y_1 > x_1)} f_{t-s}(y_1 - x_2, y_2 - x_2)\, \mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2.\end{aligned}$$

(2) Nous allons utiliser un changement de variables $(a,b) \mapsto (a,c)$ avec $c := a - b$. Si $u \geq 0$, alors sous ce changement de variables $\{(a,b) : a > 0, b < a, a - b \geq u\} \leftrightarrow \{(a,c) : a > 0, c \geq u\}$ et le module du jacobien est égal à 1. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_t - B_t \geq u) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{(a-b\geq u)} \frac{2(2a-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2a-b)^2}{2t}\right) \mathbb{1}_{(a>0)} \,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{(c\geq u)} \frac{2(a+c)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(a+c)^2}{2t}\right) \mathbb{1}_{(a>0)} \,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}c \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(c\geq u)} \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{c^2}{2t}\right) \mathrm{d}c = 2\mathbb{P}(B_t \geq u) = \mathbb{P}(|B_t| \geq u).
\end{aligned}$$

(3) Nous allons utiliser un changement de variables $(a,b) \mapsto (a,c)$ avec $c := 2a - b$. Si $u \geq 0$, alors sous ce changement de variables $\{(a,b) : a > 0, b < a, a - b \geq u\} \leftrightarrow \{(a,c) : c > a > 0, c \geq u\}$ et le jacobien est égal à 1. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(2S_t - B_t \geq u) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{(2a-b\geq u)} \frac{2(2a-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2a-b)^2}{2t}\right) \mathbb{1}_{(a>0,\, b<a)} \,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{(c\geq u)} \frac{2c}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{c^2}{2t}\right) \mathbb{1}_{(c>a>0)} \,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}c \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{(c\geq u)} \frac{2c^2}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{c^2}{2t}\right) \mathrm{d}c.
\end{aligned}$$

Or, en utilisant des coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{P}(|B_t^{(3)}| \geq u) = C \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(r\geq u)}\, r^2 \exp\left(-\frac{r^2}{2t}\right) \mathrm{d}r$$

où C est une constante de normalisation. En comparant les deux formules, nous obtenons que $2S_t - B_t$ a même loi que $|B_t^{(3)}|$.

(4) Pour $f, g, h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mesurables bornées :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(f(2S_t - B_t)\, g(S_t)\, h(S_t - B_t)) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f(2a-b)\, g(a)\, h(a-b)\, \frac{2(2a-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2a-b)^2}{2t}\right) \mathbb{1}_{(a>0,\, b<a)} \,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} f(c)\, g(a)\, h(c-a)\, \frac{2c}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{c^2}{2t}\right) \mathbb{1}_{(c>a>0)} \,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}c \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} f(c)\, \frac{2c^2}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{c^2}{2t}\right) \mathrm{d}c \left[\frac{1}{c}\int_0^c g(a)\, h(c-a)\,\mathrm{d}a\right].
\end{aligned}$$

En considérant $h \equiv 1$, respectivement $g \equiv 1$, nous obtenons que S_t, resp. $S_t - B_t$, a une loi uniforme sur $[0, 2S_t - B_t]$.