Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, déterminer les primitives des fonctions f sur l'intervalle I.

1. $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 5x + 2,\ I = \mathbb{R}.$
2. $f(x) = \dfrac{3}{x^2},\ I =]0;+\infty[.$
3. $f(x) = e^{2x},\ I = \mathbb{R}.$
4. $f(x) = e^{-3x},\ I = \mathbb{R}.$
5. $f(x) = -\dfrac{2}{x^3},\ I =]0;+\infty[.$
6. $f(x) = (x-1)^4,\ I = \mathbb{R}.$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x},\ I =]0;+\infty[.$
8. $f(x) = \cos x,\ I = \mathbb{R}.$
9. $f(x) = \cos(2x),\ I = \mathbb{R}.$
10. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}},\ I =]0;+\infty[.$
11. $f(x) = e^x - 2e^{3x} + 3e^{-x},\ I = \mathbb{R}.$
12. $f(x) = 2x\,e^{x^2},\ I = \mathbb{R}.$
13. $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}},\ I = \mathbb{R}.$
14. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1},\ I = \mathbb{R}.$

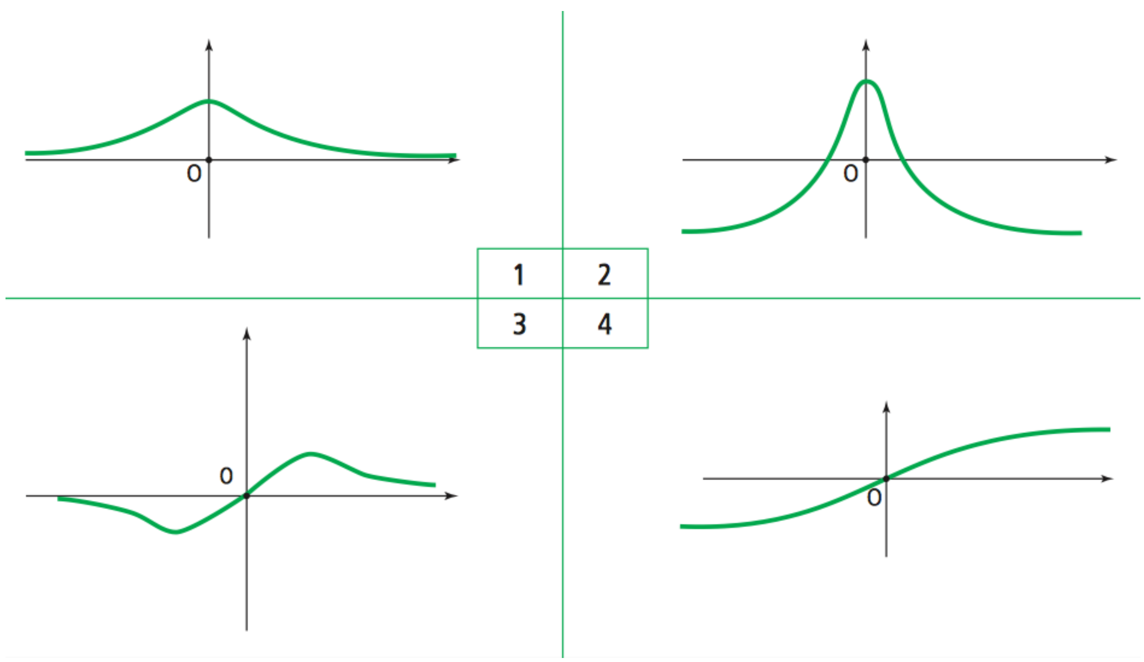
Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer la primitive F de la fonction f sur l'intervalle I telle que $F(x_0) = y_0$.

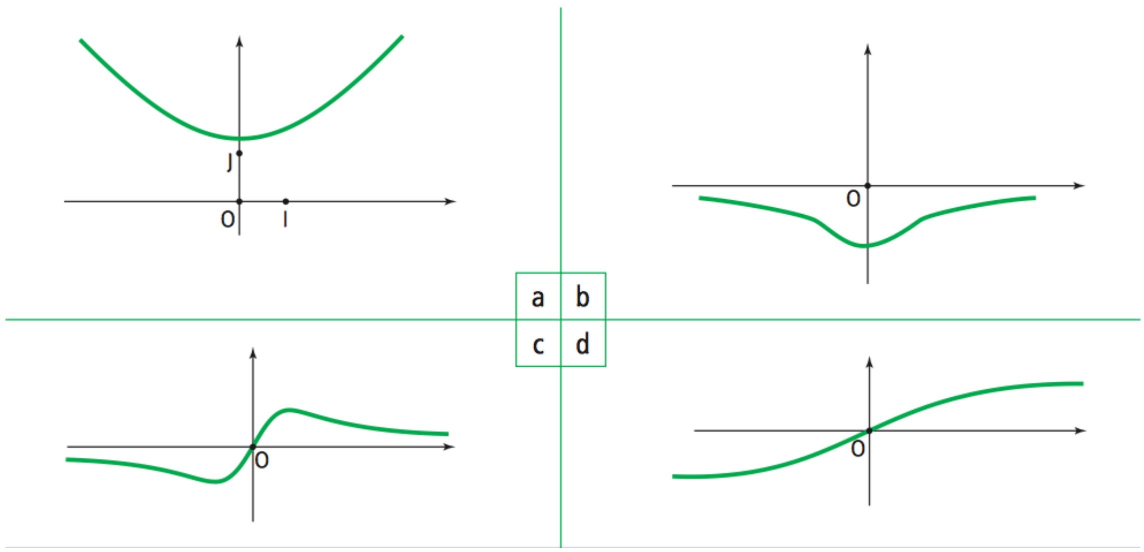
1. $f(x) = 3x+2,\ I = \mathbb{R},\ x_0 = 0$ et $y_0 = 1.$
2. $f(x) = 3x+2,\ I = \mathbb{R},\ x_0 = 2$ et $y_0 = 0.$
3. $f(x) = (x-2)^3,\ I = \mathbb{R},\ x_0 = 4$ et $y_0 = 2.$
4. $f(x) = e^x,\ I = \mathbb{R},\ x_0 = 0$ et $y_0 = 2.$
5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}},\ I = [0;+\infty[,\ x_0 = 0$ et $y_0 = -1.$
6. $f(x) = \dfrac{1}{x},\ I =]0;+\infty[,\ x_0 = 1$ et $y_0 = 3.$

Exercice 3

Voici les graphes de 4 fonctions, f_1, f_2, f_3 et f_4.



Des primitives de ces fonctions sont représentées ci-dessous. Pour chacune des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4, indiquer quelle courbe correspond à celle de l'une de ses primitives.



Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-3}^{2} 2x^3\,dx \quad ; \quad \int_0^2 (x^2-x+2)\,dx \quad ; \quad \int_{-1}^{1}(1-x)\,dx \quad ; \quad \int_0^2 e^t\,dt \quad ; \quad \int_0^1 e^{-2t}\,dt \quad ; \quad \int_{-1}^{1} e^{-4t}\,dt \quad ; \quad \int_1^2 \frac{du}{u}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(2x)\,dx$$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $[-2;3]$ par $f(x) = x^2 - x - 2$ représentée par la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les variations de f.

2. Déterminer les primitives de f sur $[-2;3]$.

3. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-2$ et $x=3$.
Montrer que $\mathscr{A} = \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx - \int_{-1}^{2} f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$. En déduire la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+3)\,e^{-x}$ et représentée par la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé.

1. Étudier les variations de f. Déterminer le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est positive sur $[-3;+\infty[$.

2. Déterminer les réels a et b tels que la fonction $F(x) = (ax+b)\,e^{-x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer la valeur exacte, puis une valeur approchée par défaut à 10^{-2} près, de l'aire du domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -3$ et $x = 4$.

4. Soit n un entier naturel. On note $I_n = \int_{-3}^{n} f(x)\,dx$. Montrer que $I_n = e^3 - (n+4)\,e^{-n}$. En déduire que I_n admet une limite que l'on calculera quand n tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.

Exercice 7

Soient les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(x) = -\frac{x}{2} + 1, \quad h(x) = -\frac{x^2}{2} + 1.$$

1. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0;1]$, on a :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

2. En déduire un encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

Exercice 8

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt$.

1. Calculer $I + J$.

2. On rappelle que, pour tout réel x, $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$. En déduire la valeur de $I - J$.

3. En déduire les valeurs de I et de J.