Sol 17 : ($\Longrightarrow$) Supposons que $u_n \longrightarrow \ell \in \mathbb{R}$. Alors, pour toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, nous savons que $u_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell$. Par conséquent, ℓ est l'unique valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

($\Longleftarrow$) Nous savons que $\underline{\lim}\, u_n$ et $\overline{\lim}\, u_n$ sont des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par conséquent, si celle-ci n'admet qu'une seule valeur d'adhérence, on a nécessairement $\underline{\lim}\, u_n = \overline{\lim}\, u_n$. Le cours nous apprend que cette égalité implique la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sol. 18 : Nous considérons donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite réelle bornée et nous posons, comme dans le cours,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad i_n = \inf_{k \geq n} u_k \quad \text{et} \quad s_n = \sup_{k\geq n} u_k ,$$

de sorte que $\lim i_n = \underline{\lim}\, u_n$ et $\lim s_n = \overline{\lim}\, u_n$.

Si a est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par définition, il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $u_{\varphi(n)} \longrightarrow a$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad i_n \leq u_n \leq s_n$

donc on a aussi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad i_{\varphi(n)} \leq u_{\varphi(n)} \leq s_{\varphi(n)} \qquad (*)$$

En tant que suite extraite d'une suite convergente, on a :

$$i_{\varphi(n)} \longrightarrow \underline{\lim}\, u_n$$

Pour une raison analogue, on a $s_{\varphi(n)} \longrightarrow \overline{\lim}\, u_n$.

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'encadrement large $(*)$, on obtient donc :

$$\underline{\lim}\, u_n \leq a \leq \overline{\lim}\, u_n .$$