Chapitre 1

Le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels

1.1 $\mathbb{R}$ est un CCTO

1.1.1 Bref rappel sur les anneaux et les corps

On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ de deux opérations, l'addition notée $+$ et la multiplication notée $\times$, de sorte que $(\mathbb{R}, +, \times)$ a une structure d'*anneau*, ce qui signifie qu'il possède les trois propriétés suivantes.

Propriété 1 : $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif.

- Associativité : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x + y) + z = x + (y + z)$.
- Élément neutre noté 0 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x + 0 = 0 + x = x$.
- Symétrique : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists (-x) \in \mathbb{R}$, $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
- Commutativité : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x + y = y + x$.

Exercice 1. Montrer que l'élément neutre 0 est unique.
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le symétrique $(-x)$ est unique.
En déduire que $-(-x) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Remarque : Le symétrique pour l'addition, qui est commutative, est plutôt appelé *l'opposé*.

La deuxième propriété concerne la multiplication $\times$.

Propriété 2 : $(\mathbb{R}, \times)$ satisfait les deux assertions suivantes.

— Associativité : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$.

— Élément neutre noté 1 : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \times 1 = 1 \times x = x$.

La troisième propriété concerne à la fois la multiplication et l'addition.

Propriété 3 : Distributivité de $\times$ par rapport à $+$.
Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z) \text{ et } (x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z).$$

Exercice 2. Prouver que, dans tout anneau $(\mathbb{A}, +, \times)$, on a la propriété suivante : pour tout $x \in \mathbb{A}$, $0 \times x = x \times 0 = 0$.

Exemple 1 : On appelle *anneau trivial* (ou *anneau nul*) l'anneau $\big(\{0\}, +, \times\big)$.

Dans n'importe quel anneau $\mathbb{A}$ non nul, on a $0 \neq 1$, comme nous allons le prouver en raisonnant par l'absurde.
Si $1 = 0$, alors, pour tout $x \in \mathbb{A}$, $x = x \times 1 = x \times 0 = 0$, donc $\mathbb{A}$ serait réduit à l'anneau nul $\{0\}$.

Exemple 2 : Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ est un anneau.

Exercice 3 : Soit $\mathbb{A}$ un anneau. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{A}$, on a l'égalité : $(-1) \times x = x \times (-1) = -x$.

On dit qu'un anneau $(\mathbb{A}, +, \times)$ est commutatif si la multiplication est commutative. Ainsi, $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau commutatif puisque :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \times y = y \times x.$$

Donnons un exemple d'anneau non commutatif. Notons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $A = [a_{i,j}]_{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2}$ à coefficients réels.
On le munit d'une addition en posant $A + B = [a_{i,j} + b_{i,j}]_{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2}$, et d'une multiplication en posant $A \times B = [c_{i,j}]_{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2}$ avec :

$$\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Alors, $\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times\big)$ est un anneau non commutatif car, en général, on n'a pas l'égalité $AB = BA$.

Définition 1.1.1 *On dit que* $(\mathbb{K}, +, \times)$ *est un* corps *si* $(\mathbb{K}, +, \times)$ *est un anneau dans lequel tout élément non nul admet un symétrique pour* $\times$ *:*

$$\forall x \in \mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}, \quad \exists x^{-1} \in \mathbb{K}, \quad x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1.$$

Remarque 1 : Le symétrique pour $\times$ est encore appelé *inverse*.

Remarque 2 : Dans un anneau non nul, 0 ne peut avoir d'inverse puisque, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $0 \times y = y \times 0 = 0 \neq 1$. C'est pourquoi la condition précédente porte sur $x \in \mathbb{K}^*$.

Remarque 3 : Si $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps, alors $(\mathbb{K}^*, \times)$ est un groupe.

Remarque 4 : Un corps étant un cas particulier d'anneau, il est dit *commutatif* si la multiplication est commutative.

Exemple 1 : $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Exemple 2 : Si p est un entier premier, alors $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps commutatif.

Exercice 4 : Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps et soit $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$. On fait les quatre hypothèses suivantes.

- $1 \in \mathbb{L}$
- $\forall (x, y) \in \mathbb{L}^2,\ x - y \in \mathbb{L}$, où $x - y := x + (-y)$.
- $\forall (x, y) \in \mathbb{L}^2,\ x \times y \in \mathbb{L}$
- $\forall x \in \mathbb{L}^*,\ x^{-1} \in \mathbb{L}$.

On munit $\mathbb{L}$ de l'addition induite et de la multiplication induite. Démontrer que $(\mathbb{L}, +, \times)$ est un corps.
On dit que $(\mathbb{L}, +, \times)$ est un *sous-corps* de $(\mathbb{K}, +, \times)$.

Exercice 5 : Vérifier que $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps commutatif.

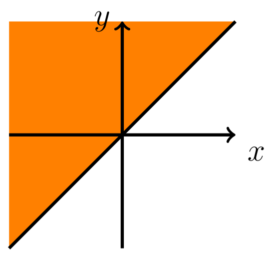
Exercice 6 : On note $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2},\ (a, b) \in \mathbb{Q}^2\} \subseteq \mathbb{R}$.
Montrer que $\big(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \times\big)$ est un corps commutatif.
Indication. On pourra utiliser : $(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$.

On déduit de ces exercices que $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un sous-corps de $\big(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \times\big)$, qui est lui-même un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
Ce sont des sous-corps au sens strict puisque $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subsetneq \mathbb{R}$.

1.1.2 Relation d'ordre

Définition 1.1.2 *Soit E un ensemble. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est définie par un sous-ensemble G de $E \times E$. On note $x\mathcal{R}y$ si $(x, y) \in G$.*
On dit que $G \subseteq E \times E$ est le graphe *de la relation $\mathcal{R}$.*

Exemple 1 : La relation $\leq$ sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est définie par le graphe suivant.



Définition 1.1.3 *On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une* relation d'ordre *si elle satisfait les trois conditions suivantes.*

- *Réflexivité :* $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$.
- *Transitivité :* $\forall (x, y, z) \in E^3,\ [\,x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\,] \ \Rightarrow\ x\mathcal{R}z$.
- *Antisymétrie :* $\forall (x, y) \in E^2,\ [\,x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x\,] \ \Rightarrow\ x = y$.

Exemple : La relation $\leq$ sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre. De même pour la relation $\geq$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit E un ensemble,et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Vérifier que l'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.
On rappelle que $A \subseteq B$ signifie que $\forall x \in E,\ [x \in A \Rightarrow x \in B]$.

Définition 1.1.4 *On dit qu'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur E est* totale *si :*

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x.$$

Exemple : La relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est totale puisque :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

On dit que $(\mathbb{R}, \leq)$ est un ensemble *totalement ordonné*. De même pour $(\mathbb{R}, \geq)$.

Exercice 8. Soit E un ensemble ni vide ni réduit à un singleton. Montrer que l'inclusion n'est pas une relation d'ordre totale sur $\mathcal{P}(E)$.

Définition 1.1.5 *Soit* $(\mathbb{K},+,\times)$ *un corps commutatif tel que l'ensemble* $\mathbb{K}$ *est muni d'une relation d'ordre totale* $\mathcal{R}$. *On dit que* $(\mathbb{K},+,\times,\mathcal{R})$ *est un* corps commutatif totalement ordonné *(CCTO) s'il satisfait en outre :*

— *La relation d'ordre* $\mathcal{R}$ *est compatible avec l'addition :*

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{K}^3, \quad x\mathcal{R}y \;\Rightarrow\; (x+z)\;\mathcal{R}\;(y+z)$$

— *Le sous-ensemble* $\{x \in \mathbb{K},\; 0\mathcal{R}x\}$ *est stable par* $\times$ *:*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{K}^2, \quad 0\mathcal{R}x \text{ et } 0\mathcal{R}y \;\Rightarrow\; 0\;\mathcal{R}\;(x\times y).$$

Exemple : $(\mathbb{R},+,\times,\leq)$ est un CCTO

Contre-exemple : $(\mathbb{R},+,\times,\geq)$ n'est pas un CCTO car $\{x \in \mathbb{R}, 0 \geq x\}$ n'est pas stable par la multiplication.

Remarque. Dans le cas d'un corps commutatif totalement ordonné, on note souvent la relation d'ordre $\leq$ plutôt que $\mathcal{R}$. On introduit alors la notation $\geq$ que l'on définit par l'équivalence suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{K}^2, \quad x \geq y \;\Leftrightarrow\; y \leq x.$$

Exercice 9 (« règle de signes »). Soit $(\mathbb{K},+,\times,\leq)$ un CCTO.
Prouver que l'on a les propriétés suivantes, pour tout $(x,y) \in \mathbb{K}^2$.
a) $x \geq 0 \;\Rightarrow\; -x \leq 0$.
b) $x \leq 0$ et $y \leq 0 \;\Rightarrow\; x \times y \geq 0$.
c) $x \leq 0$ et $y \geq 0 \;\Rightarrow\; x \times y \leq 0$.
d) $x^2 := x \times x \geq 0$.
e) $1 \geq 0$.

Exercice 10. Donner deux exemples de CCTO différents de $(\mathbb{R},+,\times,\leq)$.

1.2 Propriété de la borne supérieure

Dans toute cette section, A désigne une partie de $\mathbb{R}$.

Définitions 1.2.1 *On dit que* $x \in \mathbb{R}$ *est un* majorant *de la partie* A *si :*

$$\forall y \in A, \quad y \leq x.$$

Si, en outre, $x \in A$, *on dit que* x *est* le plus grand élément *de* A.
On dit que $x \in \mathbb{R}$ *est un* minorant *de la partie* A *si :*

$$\forall y \in A, \quad y \geq x.$$

Si, en outre, $x \in A$, *on dit que* x *est* le plus petit élément *de* A.

Exercice 1. Prouver que si A admet un plus grand élément, alors celui-ci est unique. Même question avec un plus petit élément.

Notations. Si x est le plus grand élément de A, on note $x = \max A$.
Si x est le plus petit élément de A, on note $x = \min A$.

Définitions 1.2.2 *La partie $A \subseteq \mathbb{R}$ est dite* majorée *s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que x est un majorant de A.*
La partie A est dite minorée *s'il existe $x \in \mathbb{R}$ t.q. x est un minorant de A.*
Enfin, A est dite bornée *si elle est à la fois majorée et minorée.*

Exemple. Choisissons $A = [0, 1[$. Alors, 0 est le plus petit élément de A et l'on peut noter $\min A = 0$. Les réels 1, π, 10^4 sont des majorants de A. Ainsi, A est à la fois minorée et majorée, donc bornée.

Exercice 2. Démontrer que $A = [0, 1[$ n'admet pas de plus grand élément.
Indication : Raisonner par l'absurde en supposant que x est le plus grand élément de A, puis considérer le réel $(1 + x)/2$.

Remarque. En prenant encore $A = [0, 1[$, nous constatons que 1 joue un rôle particulier parmi les majorants de A : c'est le plus petit d'entre eux.

Définitions 1.2.3 *Si l'ensemble des majorants de $A \subseteq \mathbb{R}$ admet un plus petit élément, on appelle celui-ci* la borne supérieure *de A, notée* $\sup A$.
Si l'ensemble des minorants de $A \subseteq \mathbb{R}$ admet un plus grand élément, on appelle celui-ci la borne inférieure *de A, notée* $\inf A$.

Remarque. On parle de **la** borne supérieure de A puisque, par définition, il s'agit du plus petit élément d'une partie de $\mathbb{R}$ donc, selon l'exercice 1, il y a unicité de cet élément. En revanche, il n'y a pas forcément existence d'une borne supérieure. Par exemple, l'ensemble des majorants de $\mathbb{Z}$ est vide, donc ne saurait admettre un plus petit élément : $\mathbb{Z}$ n'a pas de borne supérieure.

Exemples.

- ◇ Si $A = [0, 1[$, on a : $1 = \sup A$, $0 = \inf A = \min A$.
- ◇ Si $A = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, on a $0 = \inf A = \min A$ et A n'admet pas de borne supérieure.
- ◇ Si $A = \mathbb{Q}$, alors A n'admet ni borne inférieure ni borne supérieure.

Exercice 3. Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Établir l'équivalence :

$$x = \max A \;\Leftrightarrow\; [\, x \in A \text{ et } x = \sup A\,].$$

Écrire l'énoncé symétrique avec $\min A$.

Exercice 4. Soit $A = \{1/n,\ n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathbb{R}$. Démontrer que A admet une borne inférieure que l'on déterminera.

La caractérisation suivante d'une borne supérieure sera très utile quand nous étudierons les suites de nombres réels.

Proposition 1.2.4 *Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. On a l'équivalence :*

$$M = \sup A \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} M \text{ majorant de } A \quad \textit{et} \\ \forall \epsilon > 0,\ \exists x \in A,\ M - \epsilon < x \end{cases}$$

Démonstration: ($\Rightarrow$) Si M est la borne supérieure de A, alors M est un majorant de A par définition d'une borne supérieure. Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Comme M est <u>le plus petit</u> des majorants de A, le réel $M - \epsilon$, qui est strictement inférieur à M, n'est pas un majorant de A. Ceci signifie qu'il existe $x \in A$ tel que $M - \epsilon < x$.
($\Leftarrow$) Puisque M est par hypothèse un majorant de A, il suffit de prouver qu'il n'existe pas de majorant de A qui soit strictement inférieur à M (pour en déduire que M est bien le plus petit des majorants de A).
Or, si un réel m est tel que $m < M$, on peut poser $\epsilon = M - m > 0$, de sorte que notre hypothèse implique l'existence de $x \in A$ tel que $m = M - \epsilon < x$; ainsi, m n'est pas un majorant de A. $\square$

Le résultat central de cette section est le suivant. Nous l'admettrons car le démontrer reviendrait *grosso modo* à construire $\mathbb{R}$, ce qui dépasse le cadre de ce stage.

Théorème 1.2.5 (Propriété de la borne supérieure) *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*

Cette propriété caractérise $\mathbb{R}$ parmi tous les corps commutatifs totalement ordonnés. En effet, quand on effectue la construction de $\mathbb{R}$, on démontre qu'il est – à isomorphisme près – le seul corps commutatif totalement ordonné qui possède le propriété de la borne supérieure.

Exercice 5. Démontrer que toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Exercice 6. Soit $B \subseteq \mathbb{R}$ une partie bornée et soit $A \subseteq B$ telle que $A \neq \varnothing$. Démontrer que $\sup A \leq \sup B$ et $\inf A \geq \inf B$, en justifiant l'existence de ces bornes supérieures et inférieures.

Exercice 7. L'objectif de cet exercice est de démontrer que $(\mathbb{Q}, +, \times, \leq)$ n'a pas la propriété de la borne supérieure en considérant $A = \{x \in \mathbb{Q},\ x^2 \leq 2\}$.
Soit $b \in \mathbb{Q}$ un majorant de A ; on pose $c = (b/2) + (1/b)$.
a) Prouver que $c^2 - 2 \geq 0$ et en déduire que c est un majorant de A.
b) prouver que $2/c \in A$, puis que $b^2 \geq 2$.
c) en admettant que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, déduire de ce qui précède que $c < b$ et conclure.

1.3 Relation d'équivalence.

Définition 1.3.1 *Soit E un ensemble. On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est une* relation d'équivalence *si elle satisfait les trois conditions suivantes.*

— *Réflexivité :* $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$.
— *Symétrie :* $\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \ \Rightarrow\ y\mathcal{R}x$.
— *Transitivité :* $\forall (x, y, z) \in E^3,\ [\,x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\,] \ \Rightarrow\ x\mathcal{R}z$.

Exemple 1. L'égalité est une relation d'équivalence sur E.

Exercice 8.
a) Soient E et F des ensembles et soit $f : E \to F$ une application. On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur E comme suit.

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y \text{ si et seulement si } f(x) = f(y).$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On choisit $E = \mathbb{Z}$, $F = [\![0; n-1]\!]$ et f est l'application qui à un entier relatif associe le reste de sa division euclidienne par n. Comment s'appelle la relation d'équivalence ainsi définie ?

On utilise souvent la notation $\sim$ pour une relation d'équivalence.

Définition 1.3.2 *Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Pour tout $x \in E$, on appelle* classe d'équivalence *de x et l'on note $\dot{x}$ la partie de E définie comme suit :*

$$\dot{x} = \{y \in E,\ \ y \sim x\}.$$

Remarquons que, par réflexivité, $x \in \dot{x}$, pour tout $x \in E$.

Proposition 1.3.3 *Pour tout $(x, y) \in E^2$, nous avons l'équivalence :*

$$\dot{x} = \dot{y} \;\Leftrightarrow\; x \sim y.$$

Démonstration: $(\Rightarrow)$ On a l'implication : $x \in \dot{x} = \dot{y} \;\Rightarrow\; x \sim y$.
$(\Leftarrow)$ Montrons d'abord que $x \sim y \;\Rightarrow \dot{x} \subseteq \dot{y}$.
Si $z \in \dot{x}$, ce qui signifie $z \sim x$, alors, puisque $x \sim y$, on obtient $z \sim y$ par transitivité, et donc $z \in \dot{y}$.
On termine la preuve par symétrie : $x \sim y \;\Rightarrow\; y \sim x \;\Rightarrow\; \dot{y} \subseteq \dot{x}$. $\square$

Tout élément d'une classe d'équivalence est appelé *un représentant* de cette classe. Ainsi, pour tout $(x, y) \in E^2$, nous avons les équivalences

$$y \text{ représentant de la classe } \dot{x} \;\Leftrightarrow\; y \in \dot{x} \;\Leftrightarrow\; y \sim x \;\Leftrightarrow\; \dot{y} = \dot{x}.$$

Rappelons maintenant la définition suivante, qui nous sera utile dans la suite.

Définition 1.3.4 *Une* partition *d'un ensemble E est un ensemble de parties non vides de E, deux à deux disjointes et dont la réunion vaut E.*

Exemples.

- $\big\{\{1;4;7;8;9\},\{2;3;10\},\{5;6\}\big\}$ est une partition de $[\![1;10]\!]$.
- $\big\{2\mathbb{Z}, 2\mathbb{Z}+1\big\}$ est une partition de $\mathbb{Z}$.
- $\big\{\{k\}\times\mathbb{N},\;\; k \in \mathbb{N}\big\}$ est une partition de $\mathbb{N}^2$.

Exercice 9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle n-ième nombre de Bell[1] et l'on note B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1;n]\!]$ ([2]). On pose $B_0 = 1$.
a) Que valent B_1, B_2 et B_3 ?
b) Démontrer que l'on a la relation de récurrence suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

Indication. Trier les partitions de $[\![1;n+1]\!]$ en fonction du nombre d'éléments qui sont hors de la partie contenant l'élément 1.

1. Eric Temple Bell(1883-1960), mathématicien d'origine écossaise. Il fut aussi écrivain, notamment de science-fiction.
2. Ou de tout ensemble de cardinal n.

Définition 1.3.5 *Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.*
On appelle ensemble quotient *de E par la relation d'équivalence $\sim$ et l'on note $E/\sim$ l'ensemble des classes d'équivalence $\{\dot{x},\ x \in E\}$.*

On dit aussi que $E/\sim$ est l'ensemble E modulo la relation d'équivalence $\sim$. Intuitivement, travailler dans $E/\sim$ revient à travailler dans E en identifiant [3] les éléments x et y de E tels que $x \sim y$.

Exemple 2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Des bipoints $(A, B) \in \mathcal{E}^2$ et $(C, D) \in \mathcal{E}^2$ sont dits *équipollents* si les segments $[A, D]$ et $[B, C]$ ont le même milieu [4].
L'équipollence est une relation d'équivalence, que nous noterons $\sim$.
Ses classes d'équivalence sont appelées *vecteurs*. L'ensemble quotient $\mathcal{E}\times\mathcal{E}/\sim$ définit *l'espace vectoriel* associé à l'espace affine $\mathcal{E}$.

Proposition 1.3.6 *L'ensemble quotient $E/\sim$ est une partition de E.*

Démonstration: Toute classe d'équivalence est non vide puisque $x \in \dot{x}$, pour tout $x \in E$. Pour la même raison, on a :

$$\bigcup_{x\in E} \dot{x} \supseteq \bigcup_{x\in E}\{x\} = E \text{ d'où } \bigcup_{x\in E} \dot{x} = E.$$

Considérons maintenant deux classes distinctes $\dot{x} \neq \dot{y}$ (ce qui implique $x \not\sim y$) et prouvons par l'absurde que leur intersection est vide.
Soit $z \in \dot{x} \cap \dot{y}$; alors $z \sim x$ et $z \sim y$, d'où, par symétrie, $x \sim z$, puis par transitivité, $x \sim y$, d'où $\dot{x} = \dot{y}$, ce qui contredit notre hypothèse. $\square$

Proposition 1.3.7 *Soit $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau. Une relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathbb{A}$ est dite compatible avec l'addition et la multiplication si, pour tout $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{A}^4$ tel que $x_1 \sim x_2$ et $y_1 \sim y_2$, on a :*

$$x_1 + y_1 \sim x_2 + y_2 \quad \text{et} \quad x_1 \times y_1 \sim x_2 \times y_2.$$

On peut alors légitimement définir une addition (encore notée $+$) et une multiplication (encore notée $\times$) sur $\mathbb{A}/\sim$ en posant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{A}^2, \quad \dot{x} + \dot{y} = \dot{\overline{x + y}} \quad \text{et} \quad \dot{x} \times \dot{y} = \dot{\overline{x \times y}}.$$

Le triplet ainsi défini $(\mathbb{A}/\sim, +, \times)$ est un anneau, appelé anneau quotient *de $\mathbb{A}$ par la relation d'équivalence $\sim$.*

3. Au sens de considérer comme identiques.
4. Dans un plan affine, cela revient à dire que $ABDC$ est un parallélogramme.

Exercice 10. Démontrer la Proposition 1.3.7.

Exemple 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Sur l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$, on définit la relation $\mathcal{R}$ de *congruence modulo* n par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \quad x\mathcal{R}y \text{ si et seulement si } x - y \in n\mathbb{Z}.$$

On vérifie facilement que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ compatible avec l'addition et la multiplication. L'anneau quotient $(\mathbb{Z}/\sim, +, \times)$, que l'on note plutôt $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$, est très important en arithmétique.

Chapitre 2

Suites réelles

2.1 Convergence ou divergence d'une suite

Définition 2.1.1 *On appelle* suite réelle *(ou* suite à valeurs dans $\mathbb{R}$*) toute application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$.

Une suite réelle est donc une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. La valeur prise par l'application u en l'entier $n \in \mathbb{N}$ est souvent notée u_n de préférence à $u(n)$. De même, on note souvent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'application u.

Remarque. Certains auteurs définissent une suite réelle comme une application d'une partie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Cela a le mérite d'inclure les suites finies, qui sont des applications de $[\![1; N]\!]$ dans $\mathbb{R}$, où N est un entier non nul.

Définition 2.1.2 *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite* majorée *(respectivement* minorée*, respectivement* bornée*) si l'ensemble* $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ *l'est.*

Exemple. La suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n!$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est minorée (par 0 et même par 1), non majorée, non bornée. Elle n'est pas majorée car, pour tout $M > 0$, il suffit de prendre $n = \lfloor M \rfloor + 1$ et l'on a :

$$u_n = n! \geq n > M.$$

On a utilisé la notation $\lfloor x \rfloor$ pour la *partie entière* du réel x. Rappelons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la partie entière de x est l'unique entier n tel que $n \leq x < n + 1$. Par exemple $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 5/4 \rfloor = 1$, $\lfloor e \rfloor = 2$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.
On utilise souvent le fait que, par définition de la partie entière, $\lfloor x \rfloor + 1$ est un entier strictement supérieur au réel x.

Exercice 1. Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si :

$$\exists M > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M.$$

Définition 2.1.3 *On dit qu'une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge *vers* $l \in \mathbb{R}$ *si :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - l| < \epsilon. \tag{2.1}$$

On note alors $u_n \to l$ *et on dit que* l *est la* limite *de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2. Démontrer l'unicité de la limite d'une suite en supposant que $u_n \to l$ et $u_n \to l'$, avec $l \neq l'$, et en aboutissant à une contradiction.

Cet exercice justifie l'expression « **la** limite » à la fin de la Définition 2.1.3. On peut noter indifféremment $u_n \to l$ ou $l = \lim u_n$.

Exemples. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *stationnaire* s'il existe $c \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq N$, $u_n = c$. On a alors bien sûr $u_n \to c$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = 1/n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, converge vers $l = 0$. En effet, pour tout $\epsilon > 0$, il suffit de choisir $N = \lfloor 1/\epsilon \rfloor + 1$ pour obtenir :

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - 0| \;=\; \frac{1}{n} \;\leq\; \frac{1}{N} \;<\; \epsilon.$$

Exercice 3.
a) Soit $c \in \mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq c$. On suppose que $u_n \to l$. Démontrer que $l \leq c$.
b) Démontrer, à l'aide d'un contre-exemple, que l'on n'a pas de propriété analogue pour une inégalité stricte. Autrement dit, on peut avoir $u_n < c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_n \to l$, sans avoir pour autant $l < c$.
c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans l'intervalle réel $[a, b]$. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Que peut-on dire de sa limite ?

Remarque. La propriété établie dans a) reste vraie si l'on suppose simplement qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq c$, pour tout $n \geq n_0$.
De même, la propriété étable dans c) se généralise comme suit : s'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in [a, b]$, pour tout $n \geq n_0$, et si $u_n \to l$, alors $l \in [a, b]$.

Définition 2.1.4 *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* convergente *s'il existe un réel* l *tel que* $u_n \to l$. *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* divergente *si elle n'est pas convergente.*

Proposition 2.1.5 *Toute suite réelle convergente est bornée.*

Démonstration: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente ; posons $l = \lim u_n$. En prenant $\epsilon = 1$ dans la formule (2.1) de la Définition 2.1.3, on obtient :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - l| < 1.$$

Par inégalité triangulaire, on en déduit :

$$\forall n \geq N, \quad |u_n| = |u_n - l + l| \ \leq \ |u_n - l| + |l| \ < \ 1 + |l|.$$

Nous posons maintenant $M = \max\big(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, 1 + |l|\big)$ et nous obtenons finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M\,,$$

ce qui prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, selon l'Exercice 1. □

La réciproque de cette proposition est fausse, comme nous allons le constater dans l'exercice suivant.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = (-1)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée et divergente.

Proposition 2.1.6 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $u_n \to l$ et $v_n \to l'$. Alors, $u_n + v_n \to l + l'$.*

Démonstration: Soit $\epsilon > 0$ arbitraire. On a bien sûr $\epsilon/2 > 0$ et, puisque $u_n \to l$, on peut appliquer la formule (2.1) de la Définition 2.1.3 pour obtenir :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_1, \quad |u_n - l| < \frac{\epsilon}{2}.$$

De façon analogue,

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_2, \quad |v_n - l'| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Par inégalité triangulaire, on en déduit :

$$\forall n \geq N, \quad |u_n + v_n - (l + l')| \ \leq \ |u_n - l| + |v_n - l'| \ < \ \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,,$$

ce qui prouve bien que $u_n + v_n \to l + l'$, puisque $\epsilon > 0$ était arbitraire. □

Proposition 2.1.7 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $u_n \to l$ et $v_n \to l'$. Alors, $u_n \times v_n \to l \times l'$.*

Démonstration: Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est bornée selon la Proposition 2.1.5. Nous avons donc :

$$\exists M > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M.$$

Posons $M' = \max\big(M, |l'|\big)$, de sorte que :

$$|l'| \leq M' \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M'. \tag{2.2}$$

Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Puisque $u_n \to l$ et $\epsilon/(2M') > 0$, nous pouvons appliquer la formule (2.1) de la Définition 2.1.3 pour obtenir :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_1, \quad |u_n - l| \ < \ \frac{\epsilon}{2M'}. \tag{2.3}$$

De même, on a :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_2, \quad |v_n - l'| \ < \ \frac{\epsilon}{2M'}. \tag{2.4}$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$, de sorte que les deux inégalités strictes précédentes sont satisfaites pour tout $n \geq N$.
Remarquons maintenant que nous avons la petite astuce d'écriture :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n{\times}v_n - l{\times}l' = u_n{\times}(v_n - l') + l'{\times}(u_n - l)\,,$$

ce dont nous déduisons, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n{\times}v_n - l{\times}l'| \ \leq \ |u_n| \times |v_n - l'| + |l'| \times |u_n - l|.$$

Finalement, en supposant $n \geq N$ pour pouvoir utiliser toutes les formules (2.2), (2.3) et (2.4) à la fois, nous déduisons de l'inégalité précédente :

$$\forall n \geq N, \quad |u_n{\times}v_n - l{\times}l'| \ \leq \ M'{\times}\frac{\epsilon}{2M'} + M'{\times}\frac{\epsilon}{2M'} = \epsilon\,,$$

ce qui nous permet de conclure puisque $\epsilon > 0$ était quelconque. $\square$

Exercice 5. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $u_n \to l$ et $v_n \to l'$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. Démontrer que $l \leq l'$. A-t-on une propriété analogue pour une inégalité stricte ?

Définition 2.1.8 *On dit qu'une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet la limite $+\infty$ *(ou* tend vers $+\infty$*) si :*

$$\forall M > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad u_n > M.$$

On note alors $u_n \to +\infty$ *ou* $\lim u_n = +\infty$.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet la limite $-\infty$ *(ou* tend vers $-\infty$*) si :*

$$\forall M > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad u_n < -M.$$

On note alors $u_n \to -\infty$ *ou* $\lim u_n = -\infty$.

Remarque. Conformément à la Définition 2.1.4, une suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est dite divergente. En effet, $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des réels. Une suite qui n'admet aucune limite (ni un réel ni $+\infty$ ni $-\infty$)) est aussi dite divergente : c'est le cas par exemple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Soit $\alpha > 0$ fixé. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^\alpha$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $u_n \to +\infty$.

Exercice 7. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. On suppose que $u_n \to +\infty$. Démonter que $v_n \to +\infty$.

Exercice 8. Démontrer que la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right),$$

tend vers $+\infty$. On pourra vérifier d'abord que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \ \geq \ 1 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k.$$

Théorème 2.1.9 (d'encadrement ou « théorème des gendarmes ».)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \ \leq \ v_n \ \leq \ w_n.$$

On suppose que les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. Alors, la suite (v_n) converge aussi vers l.

Démonstration: Soit $\epsilon > 0$ arbitraire. Puisque $u_n \to l$, on a :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_1, \quad l - \epsilon < u_n < l + \epsilon.$$

De même, puisque $w_n \to l$,

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_2, \quad l - \epsilon < w_n < l + \epsilon.$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. D'après les encadrements précédents, on a :

$$\forall n \geq N, \quad l - \epsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < l + \epsilon.$$

On en déduit que, pour tout $n \geq N$, $|v_n - l| < \epsilon$, ce qui nous permet de conclure, puisque $\epsilon > 0$ était arbitraire. $\square$

Exemple. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On définit [1] la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k \lfloor kx \rfloor . ,$$

et l'on souhaite étudier le comportement asymptotique [2] de (v_n).
Puisque, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leq kx \,,$$

on introduit les suites auxiliaires $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k(kx-1) \quad \text{et } w_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 x \,,$$

si bien que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'encadrement : $u_n \leq v_n \leq w_n$.

En utilisant la formule classique $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, on calcule :

$$w_n = \frac{x\, n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{x}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x}{3}\cdot$$

En utilisant la formule classique $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$, on calcule :

$$u_n = w_n - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k = w_n - \frac{n(n+1)}{2n^3} = w_n - \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x}{3}\cdot$$

Finalement, le théorème d'encadrement nous permet de conclure que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $x/3$.
Nous rappelons maintenant la définition de la continuité d'une fonction en vue d'une application à l'étude des suites réelles.

Définition 2.1.10 *Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application.*
On dit que f est continue au point $x_0 \in D$ *si :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in D, \quad |x - x_0| < \alpha \;\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

On dit que f est continue *si elle l'est en tout point de D.*

1. On rappelle que la notation $\lfloor x \rfloor$ désigne la *partie entière* du réel x, qui est l'unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$. On a donc $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.
2. C'est-à-dire la convergence ou la divergence de la suite lorsque $n \to +\infty$.

Proposition 2.1.11 *Soit I un intervalle réel, soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application, et soit enfin $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à valeurs dans I.*
On suppose que $u_n \to l \in I$ et que l'application f est continue au point l. Alors, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ a la propriété suivante :

$$f(u_n) \to f(l).$$

Exercice 9. Démontrer la Proposition 2.1.11.

2.2 Suites monotones

Définition 2.2.1 *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite* croissante *si :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}. \tag{2.5}$$

Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite décroissante *si :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_{n+1}. \tag{2.6}$$

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone *si elle est croissante ou décroissante.*

Remarque. Si l'on a une inégalité stricte dans la formule (2.5), on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *strictement croissante*. Si l'on a une inégalité stricte dans la formule (2.6), on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *strictement décroissante*.

Théorème 2.2.2 *Toute suite croissante et majorée converge.*
Toute suite décroissante et minorée converge.

Démonstration: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée ; il existe donc $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. Nous posons :

$$A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}\,,$$

de sorte que A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée (par M). Ainsi, A admet une borne supérieure, que nous notons $l := \sup A$.
Par caractérisation d'une borne supérieure, nous avons :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad l - \epsilon < u_N.$$

En utilisant d'une part la croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'autre part le fait que cette suite est majorée par l, nous en déduisons :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad l - \epsilon < u_n \leq l.$$

Ce dernier encadrement impliquant $|u_n - l| < \epsilon$, nous obtenons : $u_n \to l$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, on prouve de façon analogue qu'elle converge vers $l = \inf\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. $\square$

Exercice 10. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la formule de récurrence :

$$u_0 \in \left[\,0, \frac{\pi}{2}\,\right] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin u_n.$$

a) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [0, 1]$.
b) Grâce à une étude de fonction, démontrer que $\sin x \leq x$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis que cette suite converge.
c) On pose $l = \lim u_n$. En utilisant la Proposition 2.1.11, démontrer qu'on a l'égalité $l = \sin l$. En déduire que $u_n \to 0$.

Exercice 11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et non majorée ; démontrer que $u_n \to +\infty$.

Remarque. On démontre de façon analogue qu'une suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$. On en déduit qu'une suite monotone admet toujours une limite dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Définition 2.2.3 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des suites réelles. On dit qu'elles sont* adjacentes *si* (u_n) *est croissante,* (v_n) *est décroissante et* $v_n - u_n \to 0$.

Proposition 2.2.4 *Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles adjacentes. Alors, elles convergent vers la même limite* $l \in \mathbb{R}$. *En outre, on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1} \leq l \leq v_{n+1} \leq v_n. \tag{2.7}$$

Exercice 12. L'objectif de cet exercice est de démontrer la Proposition 2.2.4.
a) Vérifier que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
b) Soit $n \in \mathbb{N}$ arbitraire fixé. D'après la question précédente, on a :

$$\forall m \geq n, \quad v_m - u_m \leq v_n - u_n.$$

En déduire que $0 \leq v_n - u_n$.
c) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_{n-1} \leq u_n \leq v_n \leq v_{n-1} \leq \cdots \leq v_1 \leq v_0.$$

Exhiber un majorant de la suite (u_n) et un minorant de la suite (v_n).
d) Déduire de ce qui précède qu'il existe $(l, l') \in \mathbb{R}^2$ tel que $u_n \to l$ et $v_n \to l'$.

Prouver enfin que $l = l'$.

Exercice 13. (Irrationnalité de la constante de Neper e)
On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ comme suit.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n{\times}n!}.$$

a) Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement monotones et adjacentes.
b) On définit la constante e comme étant la limite commune aux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On veut prouver que $e \notin \mathbb{Q}$ en raisonnant par l'absurde. On suppose donc qu'il existe $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $e = p/q$. Prouver que :

$$q! \times u_q \;<\; q! \times e \;<\; q! \times v_q\,,$$

et aboutir à une contradiction.

Remarque. L'encadrement (2.7) de la Proposition 2.2.4 implique :

$$0 \leq e - u_n \leq v_n - u_n = \frac{1}{n{\times}n!}.$$

Comme $10{\times}10! = 36\,288\,000$, il suffit de calculer u_{10} pour obtenir une valeur approchée de e à 10^{-7} près.

Nous allons déduire de la Proposition 2.2.4 le résultat classique suivant.

Théorème 2.2.5 ***(des segments emboîtés)***
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad a_n \leq b_n$;*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$;*
- *La suite $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Alors, il existe un unique $l \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \;=\; \{l\}.$$

Exercice 14. L'objectif de cet exercice est de démontrer le Théorème 2.2.5.
a) Vérifier que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
En appelant l leur limite commune, prouver que :

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] \;\supseteq\; \{l\}.$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \leq x \leq b_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Prouver que $x = l$ puis conclure la démonstration du Théorème 2.2.5.

2.3 Suites bornées

Considérons une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que nous supposons bornée. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons poser :

$$i_n = \inf\{u_k,\ k \geq n\} \quad \text{et} \quad s_n = \sup\{u_k,\ k \geq n\}. \tag{2.8}$$

On a ainsi défini une suite $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée donc convergente. Symétriquement, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée donc convergente.

Définition 2.3.1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle bornée. On définit sa* limite inférieure *par :*

$$\liminf u_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} u_k.$$

On définit sa limite supérieure *par :*

$$\limsup u_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} u_k.$$

Remarque. On utilise aussi les notations suivantes :

$$\underline{\lim}\, u_n = \liminf u_n \quad \text{et} \quad \overline{\lim}\, u_n = \limsup u_n.$$

Exemple. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = (-1)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i_n = -1$ et $s_n = 1$, si bien que :

$$\liminf u_n = -1 \quad \text{et} \quad \limsup u_n = 1.$$

Exercice 15.
a) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ une partie non vide et bornée. On pose $-A = \{-x,\ x \in A\}$. Prouver les égalités :

$$\inf(-A) = -\sup A \quad \text{et} \quad \sup(-A) = -\inf A.$$

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Prouver que :

$$\liminf(-u_n) = -\limsup u_n \quad \text{et} \quad \limsup(-u_n) = -\liminf u_n.$$

Exercice 16. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles bornées. Démontrer que :

$$\limsup(u_n + v_n) \ \leq\ \limsup u_n + \limsup v_n\,,$$

et donner un exemple où l'inégalité est stricte.
Écrire l'inégalité analogue pour les limites inférieures.

Proposition 2.3.2 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle bornée. On a l'équivalence :*

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \quad \Leftrightarrow \quad \liminf u_n = \limsup u_n.$$

Démonstration: En définissant les suites $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme dans la formule (2.8), nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad i_n \;\leq\; u_n \;\leq\; s_n.$$

($\Leftarrow$) Puisque $\lim i_n = \lim s_n$, le théorème d'encadrement affirme que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\lim u_n = \lim i_n = \lim s_n$, c'est-à-dire que :

$$\lim u_n = \liminf u_n = \limsup u_n.$$

($\Rightarrow$) Posons $l = \lim u_n \in \mathbb{R}$. Pour $\epsilon > 0$ arbitraire, on a :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad l - \epsilon \;\leq\; u_n \;\leq\; l + \epsilon.$$

On en déduit notamment que $l - \epsilon \leq i_N$ et que $s_N \leq l + \epsilon$, ce qui implique, par croissance de $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et décroissance de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\forall n \geq N, \quad l - \epsilon \;\leq\; i_N \;\leq\; i_n \;\leq\; s_n \;\leq\; s_N \;\leq\; l + \epsilon.$$

On en déduit la convergence des suites $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l, d'où :

$$\liminf u_n = \limsup u_n = l.$$

$\square$

Remarques.
a) On retrouve la divergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque :

$$\liminf u_n = -1 \;\neq\; 1 = \limsup u_n.$$

b) Pour une suite réelle bornée, l'intérêt des notions de limite supérieure et limite inférieure est qu'elles existent toujours, contrairement à la limite.

Dans la définition suivante, la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas supposée bornée.

Définition 2.3.3 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. On considère une application* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *supposée strictement croissante. Alors, la suite* $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *s'appelle une* suite extraite *ou* sous-suite *de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples. Les suites $\big(u_{2n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(u_{2n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(u_{n^2}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 2.3.4 *Si la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $l \in \mathbb{R}$*, alors toute suite extraite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge aussi vers* l*.*

Exercice 17. Le but de cet exercice est de prouver la proposition précédente.
a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.
b) Démontrer la proposition précédente.

Remarque. Une suite extraite d'une suite extraite est bien sûr encore une suite extraite mais attention à l'écriture ! Une suite extraite de $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme :

$$\left(u_{\varphi(\,\psi(n)\,)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{i.e.} \quad \left(u_{\varphi\,\circ\,\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Notons que $\varphi \circ \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est bien strictement croissante.

Définition 2.3.5 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. On dit que* $a \in \mathbb{R}$ *est une* valeur d'adhérence *de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *s'il existe une suite extraite* $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim u_{\varphi(n)} = a$*.*

Exemple. Les réels -1 et 1 sont valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 2.3.6 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle bornée. Les réels* $\liminf u_n$ *et* $\limsup u_n$ *sont des valeurs d'adhérence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Démonstration: Nous définissons de nouveau la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n = \sup\{u_j,\ j \geq n\}\,,$$

et nous allons montrer que $\limsup u_n = \lim s_n$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cela, établissons d'abord la propriété suivante.

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists k \geq m, \quad s_k - \epsilon \ <\ u_k \ \leq\ s_k. \tag{2.9}$$

En effet, pour $m \in \mathbb{N}$ et $\epsilon > 0$ arbitraires fixés, $s_m - \epsilon$ n'est pas un majorant de l'ensemble $\{u_j,\ j \geq m\}$ donc il existe un indice $k \geq m$ tel que $s_m - \epsilon < u_k$, ce qui implique par décroissance de $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que $s_k - \epsilon \leq s_m - \epsilon < u_k$. L'inégalité $u_k \leq s_k$ résultant de la définition de s_k, on a ainsi établi (2.9).

Nous sommes maintenant en mesure de définir, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_{\varphi(n)} - \frac{1}{n+1} \; < \; u_{\varphi(n)} \; \leq \; s_{\varphi(n)}. \tag{2.10}$$

Notons tout de suite que (2.10) nous permettra de conclure car, selon le théorème d'encadrement, on a alors : $\lim u_{\varphi(n)} = \lim s_{\varphi(n)} = \limsup u_n$.
Construisons donc $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

- Utilisons (2.9) avec $m = 0$ et $\epsilon = 1$; nous pouvons donc choisir $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $s_{\varphi(0)} - 1 \; < \; u_{\varphi(0)} \; \leq \; s_{\varphi(0)}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons $\varphi(0)$, $\varphi(1), \ldots, \varphi(n-1)$ construits. Utilisons alors (2.9) avec $m = \varphi(n-1) + 1$ et $\epsilon = 1/(n+1)$.
  Nous pouvons donc choisir un entier $\varphi(n) \geq \varphi(n-1) + 1$ tel que $s_{\varphi(n)} - 1/(n+1) \; < \; u_{\varphi(n)} \; \leq \; s_{\varphi(n)}$, ce qui achève notre construction.

Nous avons ainsi démontré que $\limsup u_n$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous pourrions établir la même propriété pour $\liminf u_n$ en utilisant une méthode similaire.
Il est néanmoins plus rapide d'utiliser l'égalité $\limsup(-u_n) = -\liminf u_n$ pour en déduire l'existence d'une application $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $-u_{\psi(n)} \to -\liminf u_n$ et donc $u_{\psi(n)} \to \liminf u_n$.

□

Exercice 18. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Établir l'équivalence :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge } \Leftrightarrow \; (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ a une unique valeur d'adhérence.}$$

Exercice 19. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée et soit $a \in \mathbb{R}$ une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Établir l'encadrement :

$$\liminf u_n \; \leq \; a \; \leq \; \limsup u_n.$$

Autrement dit, la limite inférieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sa plus petite valeur d'adhérence ; de même, la limite supérieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sa plus grande valeur d'adhérence.

L'important théorème suivant résulte immédiatement de la Proposition 2.3.6.

Théorème 2.3.7 ***(Bolzano[3]-Weierstrass[4])*** *De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.*

3. Bernard Bolzano (1781-1848), mathématicien, logicien, philosophe et théologien né et mort à Prague.

4. Karl Weierstass (1815-1897), mathématicien allemand. À la suite de Bolzano, qui avait défini rigoureusement la notion de limite, il a introduit la définition de la continuité d'une fonction qui est encore utilisée aujourd'hui (avec $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$).

Ce théorème est un premier résultat de *compacité*, notion de topologie que vous étudierez dans le cadre des espaces métriques.
Donnons-en une autre démonstration par la méthode de *dichotomie*.

Démonstration: Nous considérons une suite à valeurs dans un segment $[a, b]$ et nous souhaitons construire une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Nous définissons d'abord une suite décroissante (pour l'inclusion) de segments $\big([a_n, b_n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ par la récurrence suivante.

Pour $n = 0$, $[a_0, b_0] := [a, b]$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons :

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} \big[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\big] & \text{si } \Big\{k \in \mathbb{N},\ u_k \in \big[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\big]\Big\} \text{ est infini,} \\ \big[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\big] & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par construction, nous avons la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \big\{k \in \mathbb{N},\ u_k \in [a_n, b_n]\big\} \text{ est infini.} \tag{2.11}$$

En effet, pour tout segment $[\alpha, \beta]$, l'égalité

$$\Big\{k \in \mathbb{N},\ u_k \in [\alpha, \beta]\Big\} = \Big\{k \in \mathbb{N},\ u_k \in \big[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\big]\Big\} \bigcup \Big\{k \in \mathbb{N},\ u_k \in \big[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\big]\Big\}$$

entraîne que, si l'ensemble du membre gauche est infini, alors au moins l'un des deux ensembles à droite de l'égalité l'est aussi.
Toujours par construction, nous avons $b_{n+1} - a_{n+1} = (b_n - a_n)/2$, ce qui implique, par une récurrence immédiate,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{b-a}{2^n}.$$

Ainsi, nous avons $b_n - a_n \to 0$, ce qui nous permet d'appliquer le théorème des segments emboîtés :

$$\exists!\, l \in \mathbb{R}, \quad \{l\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n].$$

Construisons à présent une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par la récurrence suivante :

- $\varphi(0) = 0$;

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons $\varphi(0), \ldots, \varphi(n-1)$ construits. Nous posons alors :
$$\varphi(n) = \min\left\{ k \geq \varphi(n-1)+1, \;\; u_k \in [a_n, b_n] \right\},$$
ce qui est légitime car ce dernier ensemble est non vide d'après (2.11).

Nous constatons maintenant que, par définition même de φ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n].$$

Or, nous avons par ailleurs :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad l \in [a_n, b_n].$$

Nous en déduisons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{\varphi(n)} - l| \;\leq\; b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$

ce qui nous permet de conclure : $u_{\varphi(n)} \to l$. □

Exercice 20. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle non majorée. Construire une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $u_{\varphi(n)} \to +\infty$.

2.4 Suites de Cauchy

Définition 2.4.1 *Une suite réelle* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est appelée* suite de Cauchy *si :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad p \geq N \text{ et } q \geq N \;\Rightarrow\; |u_p - u_q| < \epsilon. \tag{2.12}$$

Informellement, une suite est donc de Cauchy si ses termes se rapprochent indéfiniment les uns des autres à l'infini.

Remarque. Les entiers p et q jouant un rôle symétrique dans la condition (2.12), on peut la remplacer de façon équivalente par :

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad q \geq p \geq N \;\Rightarrow\; |u_p - u_q| < \epsilon. \tag{2.13}$$

Exercice 21. Montrer que toute suite réelle de Cauchy est bornée.

Proposition 2.4.2 *Toute suite réelle convergente est de Cauchy.*

Démonstration: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers $l \in \mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$ quelconque ; on a donc :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - l| < \frac{\epsilon}{2}.$$

On en déduit, en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad p \geq N \text{ et } q \geq N \;\Rightarrow\; |u_p - u_q| \leq |u_p - l| + |l - u_q| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,,$$

ce qui nous permet de conclure. □

La Proposition 2.4.2 est en fait très générale : vous verrez qu'elle reste vraie pour n'importe quelle suite à valeurs dans un espace métrique. Il n'en est pas de même de la propriété suivante.

Proposition 2.4.3 *Toute suite réelle qui est de Cauchy est convergente.*

Démonstration: Considérons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui est de Cauchy et soit $\epsilon > 0$ arbitraire. Nous avons donc l'existence de $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad p \geq N \text{ et } q \geq N \;\Rightarrow\; -\epsilon < u_p - u_q < \epsilon. \tag{2.14}$$

En particulier, si nous prenons $q = N$, nous constatons que la suite $(u_p)_{p\geq N}$ est à valeurs dans l'intervalle $[u_N - \epsilon\,,\, u_N + \epsilon]$ donc est bornée. Il en est bien sûr de même de la suite $(-u_p)_{p\geq N}$, qui admet donc une borne supérieure.

Soit $p \geq N$ quelconque fixé. L'encadrement (2.14) implique que, pour tout entier $q \geq N$, nous avons la majoration $-u_q < \epsilon - u_p$, si bien que :

$$\sup_{q\geq N}\,(-u_q) \;\leq\; \epsilon - u_p\,,$$

ce qui s'écrit encore

$$-\inf_{q\geq N} u_q \;\leq\; \epsilon - u_p\,,$$

et nous obtenons finalement :

$$u_p \;\leq\; \epsilon + \inf_{q\geq N} u_q. \tag{2.15}$$

Puisque $p \geq N$ était quelconque, nous déduisons de la majoration (2.15) :

$$\sup_{p\geq N} u_p \;\leq\; \epsilon + \inf_{q\geq N} u_q\,,$$

ce qui s'écrit encore :

$$\sup_{p\geq N} u_p - \inf_{q\geq N} u_q \;\leq\; \epsilon. \tag{2.16}$$

Définissons maintenant la suite réelle $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_n \;=\; \sup_{p\geq n} u_p - \inf_{q\geq n} u_q \;\geq\; 0\,,$$

si bien que la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et telle que :

$$\lim d_n \;=\; \limsup u_n - \liminf u_n. \tag{2.17}$$

Or, en utilisant la décroissance de $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la majoration (2.16), on a :

$$\forall n \geq N, \quad 0 \;\leq\; d_n \;\leq\; d_N \;\leq\; \epsilon.$$

Comme $\epsilon > 0$ était arbitraire, ceci prouve que $\lim d_n = 0$.

Revenant à l'égalité (2.17), nous en déduisons que $\limsup u_n = \liminf u_n$, et donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, ce qui était la conclusion cherchée. □

Si nous utilisons la terminologie générale des espaces métriques, nous venons de démontrer que $\mathbb{R}$ est *complet.*

Nous allons maintenant prouver que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet, en revenant à l'Exercice 13, page 21. Nous avions défini les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ comme suit.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n{\times}n!}. \tag{2.18}$$

Nous avions démontré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes et que leur limite commune, notée e, vérifie : $e \notin \mathbb{Q}$.

Supposons maintenant que $\mathbb{R}$ n'est pas construit. Nous pouvons quand même considérer les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Démontrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

Pour cela, nous considérons $\epsilon \in \mathbb{Q}_+^*$ arbitraire puis nous choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > 1/\epsilon$. Cela implique que :

$$\forall n \geq N, \quad 0 \;\leq\; v_n - u_n = \frac{1}{n\,n!} \;\leq\; \frac{1}{n} \;\leq\; \frac{1}{N} < \epsilon. \tag{2.19}$$

En utilisant la croissance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la décroissance de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, nous avons, pour tout $(p,q)\in\mathbb{N}^2$,

$$q \geq p \;\Rightarrow\; u_p \leq u_q \leq v_q \leq v_p \;\Rightarrow\; 0 \leq u_q - u_p \leq v_p - u_p.$$

Nous en déduisons, en utilisant la formule (2.19), l'implication :

$$q \geq p \geq N \;\Rightarrow\; 0 \leq u_q - u_p < \epsilon.$$

Nous avons ainsi démontré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. Néanmoins, elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$, ce qui résulte du raisonnement par l'absurde fait dans l'Exercice 13, légèrement adapté à notre contexte [5].

C'est pour remédier à cette incomplétude de $\mathbb{Q}$ que l'on a été amené à construire $\mathbb{R}$. Une construction possible de $\mathbb{R}$, alternative à la méthode des coupures de Dedekind, est la suivante.
On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ des suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ et l'on définit sur $\mathcal{C}$ une relation d'équivalence en disant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \sim (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ si $u_n - v_n \to 0$. On vérifie que cette relation d'équivalence est compatible avec l'addition et la multiplication des suites. On peut donc considérer l'anneau $(\mathcal{C}/\sim, +, \times)$ et l'on vérifie qu'en fait c'est un corps, que l'on appelle corps des réels.
Par exemple, les suites de Cauchy à valeurs rationnelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par (2.18) vérifient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \sim (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Leur classe d'équivalence commune pour $\sim$ définit le réel e.
Informellement, l'idée est qu'un réel est défini par l'ensemble (la *classe*) des suites de rationnels qui convergent vers ce réel. Il existe de nombreuses suites de rationnels approchant un même réel mais, d'une part, elles sont toutes de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, d'autre part, la différence entre deux telles suites converge vers 0, ce qui nous donne le critère utilisé pour définir la relation $\sim$ qui nous permet de les identifier.
Cette construction rigoureuse de $\mathbb{R}$ comme ensemble de classes d'équivalence a été développée en 1869 par le mathématicien français Charles Méray.

5. Au lieu de poser $e = \lim u_n = \lim v_n$ dans $\mathbb{R}$ et d'obtenir une contradiction en supposant que $e \in \mathbb{Q}$, on suppose ici que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers $l \in \mathbb{Q}$ et l'on obtient le même type de contradiction.

Chapitre 3

Comparaison locale ou asymptotique d'applications

3.1 Rappels sur les limites d'applications

3.1.1 Définitions

Dans les deux définitions suivantes, on considère un intervalle réel ouvert I, un réel $a \in I$ et une application $f : I \to \mathbb{R}$.

Définition 3.1.1 *On dit que l'application f admet la limite $l \in \mathbb{R}$ en a et l'on note $\lim_{x\to a} f(x) = l$ si :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - a| < \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \epsilon.$$

On dit que f est continue *au point a si : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.*

Remarque. Puisque l'intervalle I est ouvert, on a $]a - \alpha, a + \alpha[\subseteq I$ pour $\alpha > 0$ « suffisamment petit ».

Exercice 22. Démontrer l'unicité de la limite d'une application $f : I \to \mathbb{R}$ en un point $a \in I$. (Ceci justifie la notation $\lim_{x\to a} f(x) = l$.)

Définition 3.1.2 *On dit que l'application f admet la limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en a et l'on note $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$) si :*

$$\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| < \alpha \ \Rightarrow\ f(x) > A \ (\text{ resp. } f(x) < -A\,).$$

Ces deux définitions concernent le comportement local de l'application f au voisinage du point a. Nous introduisons maintenant deux autres définitions qui concernent le comportement asymptotique de f en $+\infty$. Pour cela, nous supposons désormais f définie sur une demi-droite $]c, +\infty[$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Définition 3.1.3 *On dit que* $f :]c, +\infty[\to \mathbb{R}$ *admet la limite* $l \in \mathbb{R}$ *en* $+\infty$ *et l'on note* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ *si :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists A > 0, \quad \forall x \in]c, +\infty[, \quad x > A \ \Rightarrow \ |f(x) - l| < \epsilon.$$

Remarque. Dès que $A > c$, ce que l'on peut toujours supposer, on a l'implication $x > A \ \Rightarrow \ x \in]c, +\infty[$ et donc $f(x)$ est bien défini.

Définition 3.1.4 *On dit que* $f :]c, +\infty[\to \mathbb{R}$ *admet la limite* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*) en* $+\infty$ *et l'on note* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *(resp.* $= -\infty$*) si :*

$$\forall M > 0, \ \exists A > 0, \ \forall x \in]c, +\infty[, \ x > A \ \Rightarrow \ f(x) > M \text{ (resp. } f(x) < -M \text{).}$$

Remarque. On a des définitions analogues lorsqu'on étudie le comportement asymptotique en $-\infty$ d'une application $f :] - \infty, c[\to \mathbb{R}$.

3.1.2 L'application exponentielle sur $\mathbb{R}$

(Cette sous-section est plus difficile que le reste du document)

Nous admettrons ici plusieurs propriétés qui sont relatives aux *séries entières*. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on peut définir :

$$e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!},$$

avec la convention $t^0 = 1$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, $e^0 = 1$.

L'application exponentielle, c'est-à-dire l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = e^t$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, est continue, et même dérivable, et l'on a le droit de dériver terme à terme dans la série, *i.e.*

$$f'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n t^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{t^m}{m!} = e^t = f(t).$$

Il en résulte que $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Une autre propriété des séries entières permet de justifier le calcul suivant, pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$e^s \times e^t = \Big(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{s^i}{i!}\Big) \times \Big(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t^j}{j!}\Big) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{s^i\, t^j}{i!j!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2\\ i+j=n}} \frac{s^i\, t^j}{i!j!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{s^i\, t^{n-i}}{i!(n-i)!}$$

Ceci se réécrit :

$$e^s \times e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} s^i\, t^{n-i} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} s^i\, t^{n-i} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(s+t)^n}{n!} = e^{s+t}.$$

En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{-t} \times e^t = e^0 = 1$, ce qui implique que $e^t \neq 0$.
Ainsi, l'application exponentielle f est continue et ne s'annule jamais. On en déduit qu'elle reste de signe constant (raisonner par l'absurde et appliquer le théorème des valeurs intermédiaires).
Puisque $e^0 = 1$, l'application exponentielle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

Puisque, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = f(t) = e^t > 0$, l'application exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $t \geq 0$, $e^t \geq 1 + t$ (premiers termes d'une série à termes positifs) donc $\lim_{t\to+\infty} e^t = +\infty$.
On en déduit que $\lim_{t\to+\infty} 1/e^t = 0$, c'est-à-dire que $\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$, ce qui nous donne, par le changement de variable $s = -t$, $\lim_{s\to-\infty} e^s = 0$.

Nous sommes maintenant en mesure de tracer le tableau de variation de la fonction exponentielle.

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(t) = e^t$		$+$	
$f(t) = e^t$	0		$+\infty$

L'application exponentielle étant continue est strictement croissante, elle réalise une bijection sur son image $f(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.
La bijection réciproque $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est donc continue et strictement

croissante, et vérifie $\lim_{t\to 0} g(t) = -\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$. On appelle g le *logarithme népérien.* Voici son tableau de variations.

t	0	1	$+\infty$
$g(t) = \ln t$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Comme f' ne s'annule jamais, $g = f^{-1}$ est dérivable en tout point de son ensemble de définition $\mathbb{R}_+^*$ et nous calculons :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(t) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(t)} = \frac{1}{f \circ f^{-1}(t)} = \frac{1}{t}.$$

On dit que $g = \ln$ est une *primitive* de l'application $t \mapsto 1/t$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 23. Démontrer que, pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$,

$$\ln(a\times b) = \ln a + \ln b \quad \text{et} \quad \ln(1/a) = -\ln a.$$

Indication. Considérer les réels s et t tels que $a = e^s$ et $b = e^t$.

3.1.3 Théorèmes de croissances comparées.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{t^n}{n!}$ est à termes positifs, d'où la minoration :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad e^t \ \geq \ \frac{t^n}{n!}. \tag{3.1}$$

On en déduit les résultats de croissances comparées suivants.

Proposition 3.1.5 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t^k} \ = \ +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to+\infty} t^k\, e^{-t} \ = \ 0.$$

Démonstration: En choisissant $n = k+1$ dans la minoration (3.1), on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{e^t}{t^k} \ \geq \ \frac{t}{(k+1)!}$$

On en déduit le premier résultat annoncé. Il suffit alors d'écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad t^k\, e^{-t} \ = \ \left(\frac{e^t}{t^k}\right)^{-1},$$

pour obtenir le second résultat annoncé. □

Passons maintenant à des résultats de croissances comparées concernant le logarithme népérien.

Proposition 3.1.6 *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$*, on a :*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{(\ln t)^k}{t} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to 0+} t\,|\ln t|^k = 0.$$

Démonstration: On procède par composition de limites.
Lorsque $t \to +\infty$, on a $\ln t \to +\infty$ et donc, d'après la proposition précédente,

$$\frac{e^{\ln t}}{(\ln t)^k} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty \quad \text{i.e.} \quad \frac{t}{(\ln t)^k} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty\,,$$

ce qui nous donne le premier résultat annoncé en passant à l'inverse.
Lorsque $t \to 0+$, on a $\frac{1}{t} \to +\infty$ et donc, d'après ce que l'on vient de prouver,

$$\frac{(\ln \frac{1}{t})^k}{\frac{1}{t}} \xrightarrow[t\to 0+]{} 0 \quad \text{i.e.} \quad t\,|\ln t|^k \xrightarrow[t\to 0+]{} 0\,,$$

puisque, pour tout $t \in \,]0,1]$, $\ln(1/t) = -\ln t = |\ln t|$. □

3.2 Relations de comparaison entre applications