Indications pour les leçons

Thierry MEYRE

Préparation à l'agrégation externe. Université Paris 7.
Année 2010-2011

1 Utilisation en probabilités de la transformation de Fourier ou de Laplace et du produit de convolution

Bibliographie : BRANCOVAN-JEULIN, COTTRELL exos, FELLER tome 1, OUVRARD tome 2, REVUZ.

Le produit de convolution apparaît naturellement en probabilités lorsqu'on additionne des variables aléatoires indépendantes. Il va intervenir dans chacune des sections suivantes.

1.1 Cas discret : fonctions génératrices

La fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est un cas simple de transformation de Laplace puisque :

$$\forall u \in]0,1[\quad g_X(u) = E[u^X] = E[e^{(\log u)X}]$$

Voici quatre applications des fonctions génératrices (de la plus élémentaire à la plus élaborée) :

- $\mathcal{P}(\lambda) \star \mathcal{P}(\mu) = \mathcal{P}(\lambda + \mu)$
- Les lois infiniment divisibles sur $\mathbb{N}$ sont exactement les lois de Poisson composées [*the compound Poisson distribution dans* FELLER]
- Théorème de Raïkov : Si M et N sont deux v.a.r. indépendantes telles que $M + N \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors il existe $\tau \in \mathbb{R}$ tel que $M + \tau$ et $N - \tau$ suivent des lois de Poisson [B-J]
- Processus de Galton-Watson : étude de la probabilité d'extinction en fonction du nombre moyen m d'enfants d'un individu donné [*extinction probabilities in branching processes* dans FELLER]

1.2 Transformation de Laplace

En utilisant l'injectivité de la transformation de Laplace sur les lois de probabilités portées par $\mathbb{R}_+$, on retrouve facilement le résultat suivant :

$$\gamma(\lambda, a) \star \gamma(\lambda, b) = \gamma(\lambda, a + b)$$

Une application nettement plus élaborée de la transformation de Laplace se rencontre dans les théorèmes de *grandes déviations*, qui sont au programme de l'option.

Si l'on veut rester dans le cadre du programme de tronc commun, on peut cependant faire une présentation élémentaire d'un résultat de type grandes

déviations, *l'inégalité de Hoeffding*, qui permet de construire des intervalles de confiance en statistique :
Si (X_n) est une suite de v.a. indép de loi commune $B(p)$, alors

$$\forall \epsilon > 0 \quad P(|\bar{X}_n - p| \geq \epsilon) \leq 2\exp(-2n\epsilon^2)$$

1.3 Transformation de Fourier

L'injectivité de la transformation de Fourier sur les lois permet de démontrer facilement :

$$\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2) \star \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2) = \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

Il faut bien sûr parler du *théorème-limite central* qui est une application essentielle de la caractérisation de la convergence en loi par la convergence simple des fonctions caractéristiques.
Le même genre de raisonnement nous permet de caractériser la loi gaussienne centrée comme suit : Si X et Y sont indépendantes de même loi μ centrée, admettant un moment d'ordre deux σ^2 et telle que $(X+Y)/\sqrt{2}$ a pour loi μ, alors $\mu = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ [OUVRARD tome 2, p.278-280].

Une autre caractérisation de la loi gaussienne, qui se démontre à l'aide des fonctions caractéristiques, est le *théorème de Bernstein* [OUVRARD tome 2 p.280-283] : Si X et Y sont des v.a.r. indépendantes telles que les v.a.r. $X+Y$ et $X-Y$ soient indépendantes, alors X et Y sont des variables gaussiennes.

Citons encore le *théorème de Cramer-Lévy* (on fera le lien avec le théorème de Raïkov cité précédemment) : Si X et Y sont des v.a.r. indépendantes telles que $X+Y$ est gaussienne, alors X et Y sont des variables gaussiennes.

C'est en calculant la fonction caractéristique d'un vecteur gaussien quelconque que l'on démontre l'importante propriété suivante :
Soient X et Y des vecteurs aléatoires de dimension respectives d et d' tels que (X, Y) est un vecteur gaussien. Alors X et Y sont indépendants si et seulement si toutes les covariances croisées sont nulles, i.e.

$$\forall i = 1, \cdots, d \quad \forall j = 1, \cdots, d' \quad \mathrm{Cov}(X_i, Y_j) = 0$$

Une application de la formule d'inversion de Fourier est le calcul de la fonction caractéristique d'une variable de Cauchy à partir de la transformée de Fourier de la densité de Laplace de paramètre $a > 0$: $\frac{a}{2}\exp(-a|x|)$.
On en déduit alors facilement : $C(a) \star C(b) = C(a+b)$.