Université Pierre et Marie Curie | **Année 2011-2012**
L3 - Mathématiques | Second semestre
Probabilités - LM390 | Groupe 1

Corrigé du Partiel du 29 mars 2012

Question de cours. Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{P}_X$ sa loi.

Définition. L'application $\Phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ donnée par

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{itx}\mathbb{P}_X(dx)$$

s'appelle la fonction caractéristique de X.

Proposition. Supposons que X admette un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}$. Alors Φ_X est de classe $\mathcal{C}^n$ et

$$i^n\mathbb{E}\left[X^n e^{itX}\right] = \Phi_X^{(n)}(t).$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[X^n\right] = \frac{\Phi_X^{(n)}(0)}{i^n}.$$

Exercice 1.

1. Les fonctions f_X et f_Y sont positives et intégrables, il reste donc à vérifier que leurs intégrales sont égales à 1. On a

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = \int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{+\infty} = 1$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} f_Y(y)dy = \int_{-1}^1 \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}dy = \frac{1}{\pi}\left[\arcsin(y)\right]_{-1}^1 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Donc f_X et f_Y définissent bien des densités de probabilité.

2. Calculs de $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[X^2]$.

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} yf_Y(y)dy = \int_{-1}^1 \frac{y}{\pi\sqrt{1-y^2}}dy = \frac{1}{\pi}\left[-\sqrt{1-y^2}\right]_{-1}^1 = 0.$$

Par intégration par parties, on obtient pour $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[X^2]$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} xf_X(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \left[-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ &= 0 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{\mathbb{R}} xf_X(x)dx = \int_0^{+\infty} x^3e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \left[-x^2e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = 2.$$

3. *Loi du couple (U,V), indépendance et marginales.* Comme X et Y sont indépendantes, la densité du couple est le produit des densités des 2 variables, *i.e.* $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Ainsi, pour toute fonction g mesurable bornée, on a

$$\mathbb{E}\left[g\left(U,V\right)\right] = \mathbb{E}\left[g\left(XY, X\sqrt{1-Y^2}\right)\right] = \int_{\mathbb{R}_+\times[-1,1]} g\left(xy, x\sqrt{1-y^2}\right) xe^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}dxdy.$$

On fait le changement de variable $u = xy$, $v = x\sqrt{1-y^2}$, de Jacobien

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ \sqrt{1-y^2} & \frac{-xy}{\sqrt{1-y^2}} \end{vmatrix} = -\frac{xy^2}{\sqrt{1-y^2}} - x\sqrt{1-y^2},$$

et en écrivant $x = \sqrt{u^2+v^2}$ et $y = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}$, on a alors que

$$J = -\frac{(xy)^2}{x\sqrt{1-y^2}} - x\sqrt{1-y^2} = -\frac{u^2}{v} - v = -\frac{u^2+v^2}{v}.$$

On obtient donc

$$\mathbb{E}\left[g\left(U,V\right)\right] = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} g\left(u,v\right) e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} dudv.$$

Donc la densité du couple (U,V) est $f_{(U,V)}(u,v) = \frac{1}{\pi}e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}\mathbb{1}_{\mathbb{R}}(u)\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(v)$. Comme la densité du couple s'écrit comme le produit de deux fonctions, l'une de u et l'autre de v, on en déduit que les v.a. U et V sont indépendantes. On reconnaît pour U la loi gaussienne centrée réduite donc $f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}$ et on en en déduit la densité de V par l'indépendance, *i.e.* $f_V(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(v)$.

Exercice 2. Soient N et N' des v.a. normales centrées réduites indépendantes.

1. Pour toute fonction f mesurable bornée,

$$\mathbb{E}\left[f(N^2)\right] = \int_{\mathbb{R}} f(x^2)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx = 2\int_{\mathbb{R}_+} f(x^2)\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dx = 2\int_{\mathbb{R}_+} f(u)\frac{e^{-\frac{u}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{du}{2\sqrt{u}} = \int_{\mathbb{R}_+} f(u)\frac{u^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{u}{2}}}{\sqrt{2}\Gamma(\frac{1}{2})}du,$$

par le changement de variable $u = x^2$, la parité de l'intégrale et $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Donc $N^2 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \Gamma(\frac{1}{2}, 2)$. Alors, comme N^2 est indépendant de N'^2, on a pour toute fonction f mesurable bornée,

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{N^2}{N^2+N'^2}\right)\right] = \int_{\mathbb{R}_+^2} f\left(\frac{u}{u+v}\right)\frac{u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{u}{2}-\frac{v}{2}}}{2\Gamma(\frac{1}{2})^2}dudv.$$

Par le changement de variable $x = \frac{u}{u+v}$ et $y = u+v$ de Jacobien y, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f\left(\frac{N^2}{N^2+N'^2}\right)\right] &= \int_{\mathbb{R}_+^2} f\left(x\right)\frac{x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}}{2\Gamma(\frac{1}{2})^2}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)dxdy \\
&= \int_0^1 f(x)\frac{x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})^2}\left(\int_{\mathbb{R}_+}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2}dy\right)dx \\
&= \int_0^1 f(x)\frac{x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})^2}dx
\end{aligned}$$

car $\int_{\mathbb{R}_+}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2}dy$ est la densité de la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$. Donc $\frac{N^2}{N^2+N'^2} \overset{\mathcal{L}}{\sim} \beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

2. Pour toute fonction f mesurable bornée,

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{N^2}{N^2+N'^2},\frac{N'^2}{N^2+N'^2}\right)\right]=\mathbb{E}\left[f\left(B,1-B\right)\right],$$

où $B\overset{\mathcal{L}}{\sim}\beta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Donc

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{N^2}{N^2+N'^2},\frac{N'^2}{N^2+N'^2}\right)\right]=\int_0^1 f(b,1-b)\frac{b^{-\frac{1}{2}}(1-b)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})^2}db.$$

Exercice 3. 1. *Calcul de la fonction génératrice G_Y de Y qui suit une loi de Poisson de paramètre* $\theta>0$.

$$\begin{aligned}G_Y(s) &= \mathbb{E}\left[s^Y\right]=\sum_{n\geq 0}s^n\mathbb{P}(Y=n)=\sum_{n\geq 0}s^n\frac{\theta^n}{n!}e^{-\theta}\\ &= e^{-\theta}\sum_{n\geq 0}\frac{(s\theta)^n}{n!}=e^{-\theta}e^{s\theta}=e^{\theta(s-1)}.\end{aligned}$$

2. *Calcul de la fonction génératrice G_U de U où $U=0.\mathbb{1}_{\{X=0\}}+Y.\mathbb{1}_{\{X=1\}}$*. Comme les v.a. X et Y sont indépendantes, on a

$$\begin{aligned}G_U(s) &= \mathbb{E}\left[s^U\right]=\mathbb{E}\left[s^0\mathbb{1}_{\{X=0\}}\right]+\mathbb{E}\left[s^Y\mathbb{1}_{\{X=1\}}\right]\\ &= \mathbb{P}(X=0)+\mathbb{E}\left[s^Y\right]\mathbb{P}(X=1)=1-p+pe^{\theta(s-1)}.\end{aligned}$$

Pour calculer les deux premiers moments de U, on utilise que $\mathbb{E}[U]=G'_U(1)$ et $\mathbb{E}[U^2]=G''_U(1)+G'_U(1)$. Or $G'_U(s)=p\theta e^{\theta(s-1)}$ et $G''_U(s)=p\theta^2e^{\theta(s-1)}$. D'où $\mathbb{E}[U]=p\theta$ et $\mathbb{E}[U^2]=p\theta^2+p\theta=p\theta(\theta+1)$.

Problème. Préliminaires.

1. *Densité de $(S_1,\ldots,S_n)$*. Soit g une fonction borélienne positive définie sur $\mathbb{R}^n$. Puisque les v.a. $X_1,\ldots,X_n$ sont indépendantes, on a

$$\mathbb{E}[g(S_1,\ldots,S_n)]=\int_{\mathbb{R}^n_+}g(x_1,x_1+x_2,\ldots,x_1+\cdots+x_n)\lambda^ne^{-\lambda\sum_{i=1}^n x_i}dx_1\cdots dx_n.$$

En effectuant le changement de variable $s_i=x_1+\cdots+x_i$, $i=1,\ldots,n$ de Jacobien 1, on obtient

$$\mathbb{E}[g(S_1,\ldots,S_n)]=\int_{\mathbb{R}^n_+}g(s_1,s_2,\ldots,s_n)\lambda^ne^{-\lambda s_n}\mathbb{1}_{\{s_1<\cdots<s_n\}}ds_1\cdots ds_n.$$

D'où la densité de $(S_1,\ldots,S_n)$: $f_{(S_1,\ldots,S_n)}(s_1,s_2,\ldots,s_n)=\lambda^ne^{-\lambda s_n}\mathbb{1}_{\{0<s_1<\cdots<s_n\}}$.

2. *Densité de S_n*. Il nous suffit d'intégrer cette densité en ses $n-1$ premières variables pour obtenir la densité de la loi de S_n. Ainsi,

$$\begin{aligned}f_{S_n}(s_n) &= \int_{\{0<s_1<\cdots<s_n\}}\lambda^n\exp(-\lambda s_n)ds_1\cdots ds_{n-1}\\ &= \lambda^n\exp(-\lambda s_n)\int_{\{}0<s_1<\cdots<s_n\}ds_1\cdots ds_{n-1}\\ &= \lambda^n\exp(-\lambda s_n)\frac{1}{(n-1)!}\int_{[0,s_n]^{n-1}}ds_1\cdots ds_{n-1}\end{aligned}$$

(dans la dernière égalité on intègre sur le carré tout entier, et l'on divise par le nombre de façons d'ordonner $n-1$ nombres, soit $(n-1)!$). On obtient finalement,

$$f_{S_n}(s_n) = \frac{s_n^{n-1}}{(n-1)!}\lambda^n \exp(-\lambda s_n)\mathbb{1}_{\{s_n>0\}}.$$

Comme S_n ne dépend que de $(X_1, \ldots, X_n)$ et que les $(X_k)_{k\geq 1}$ sont indépendants, on en déduit que S_n est indépendante de X_{n+1}. Ainsi la densité du couple est le produit des densité, *i.e.*

$$f_{(S_n,X_{n+1})}(s,x) = f_{S_n}(s)f_{X_{n+1}}(x) = \lambda^{n+1}\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\exp(-\lambda(s+x))\mathbb{1}_{\{s>0\}}\mathbb{1}_{\{x>0\}}.$$

3. *Densité du couple* (S_n, S_{n+1}). Pour toute fonction g borélienne positive définie sur $\mathbb{R}^2$, on a

$$\mathbb{E}[g(S_n, S_{n+1})] = \mathbb{E}[g(S_n, S_n + X_{n+1})] = \int_{\mathbb{R}_+^2} g(s, s+x)\lambda^{n+1}\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\exp(-\lambda(s+x))dsdx.$$

Par le changement de variable $y = s + x$, $s = s$, on obtient

$$\mathbb{E}[g(S_n, S_{n+1})] = \int_{\mathbb{R}_+^2} g(s,y)\lambda^{n+1}\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\exp(-\lambda y)\mathbb{1}_{\{y>s\}}dsdy.$$

Donc la densité du couple (S_n, S_{n+1}) est $f_{(S_n,S_{n+1})}(s,y) = \lambda^{n+1}\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\exp(-\lambda y)\mathbb{1}_{\{y>s>0\}}$.

Partie A.

4. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, $\{N(t) = n\} = \{S_n \leq t < S_n + X_{n+1}\}$.
5. *Loi de* $N(t)$. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N(t) = n) &= \mathbb{P}(S_n \leq t < S_n + X_{n+1}) = \int_{\mathbb{R}_+^2} \mathbb{1}_{\{s\leq t<s+x\}} f_{(S_n,X_{n+1})}(s,x)dsdx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^2} \mathbb{1}_{\{s\leq t<s+x\}}\lambda^{n+1}\frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\exp(-\lambda(s+x))dsdx \\
&= \int_0^t \lambda^n \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda s}\left(\int_{t-s}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx\right)ds \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int_0^t s^{n-1}e^{-\lambda s}e^{-\lambda(t-s)}ds = \frac{\lambda^n e^{-\lambda t}}{(n-1)!}\int_0^t s^{n-1}ds \\
&= \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}.
\end{aligned}$$

Donc $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre λt.

Partie B.

6. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, $\{N(t) = n\} = \{S_n \leq t < S_{n+1}\}$.

7. Pour tous $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$ et g fonction borélienne positive, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(S_{n+1}-t)\mathbb{1}_{\{N(t)=n\}}] &= \mathbb{E}[g(S_{n+1}-t)\mathbb{1}_{\{S_n \leq t < S_{n+1}\}}] = \int_{\mathbb{R}_+^2} g(y-t)\mathbb{1}_{\{s \leq t < y\}} f_{(S_n,S_{n+1})}(s,y)dsdy \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^2} g(y-t)\mathbb{1}_{\{s \leq t < y\}} \lambda^{n+1} \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda y} dsdy \\
&= \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_t^{+\infty} g(y-t)\lambda e^{-\lambda y} dy \left(\int_0^t s^{n-1} ds \right) \\
&= \frac{(\lambda t)^n}{n!} \int_0^{+\infty} g(x)\lambda e^{-\lambda(x+t)} dx \\
&= \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \int_0^{+\infty} g(x)\lambda e^{-\lambda x} dx = \mathbb{P}(N(t)=n)\mathbb{E}[g(X_1)].
\end{aligned}$$

8. On en déduit alors que

$$\mathbb{E}[g(S_{N(t)+1}-t)] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}[g(S_{n+1}-t)\mathbb{1}_{\{N(t)=n\}}] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(N(t)=n)\mathbb{E}[g(X_1)] = \mathbb{E}[g(X_1)].$$

Donc $S_{N(t)+1}-t$ suit une loi exponentielle de paramètre λ.