MAT431 Equations différentielles

Raphaël KRIKORIAN

4 octobre, 2011

Sommaire du cours 8

1. Plan cours 8
2. Mouvement du corps solide
3. Point fixe hyperbolique

Plan du cours 8

1. Mouvement du corps solide
2. Point fixe hyperbolique
   - Définition
   - Variétés stable/instable
   - Théorème de Hartman-Grobman

Plan du cours 8

Lire :

1 : Pour le mouvement du corps solide : chapitre 7, section 3 de [V].

Remarque :

(1) Les transparents et l'énoncé du devoir (ainsi que leurs versions révisées) sont disponibles à l'adresse : http ://www.mathematiques.polytechnique.edu/accueil/enseignement/cycle-polytechnicien/annee-2/support-pedagogique-mat-431-7583.kjsp ?RH=1254312611509

Sommaire du cours 8

1 Plan cours 8

2 Mouvement du corps solide

3 Point fixe hyperbolique

Application à l'étude du mouvement du corps solide

On considère un corps solide soumis à aucune force extérieure.
Sa position à translation près est décrite par $R(t) \in SO(3)$ (rotations de $\mathbb{R}^3$). Sa vitesse de rotation instantanée est $\omega(t) \in \mathbb{R}^3$
On note $\sigma(t) \in \mathbb{R}^3$ le moment cinétique dans l'espace et $\pi(t) = R(t)^{-1}\sigma(t)$ le moment cinétique dans le référentiel du solide.
On a

$$\sigma(t) = J(t)\omega(t)$$

où

$$J(t) = R(t)IR(t)^{-1},$$

$J(t)$ est l'opérateur d'inertie du solide vu dans l'espace et I l'opérateur d'inertie dans le référentiel du solide : ce sont des matrices symétriques définies positives.

Application à l'étude du mouvement du corps solide

La conservation du moment cinétique dans l'espace donne l'équation d'Euler : (dans le solide)

$$\dot{\pi}(t) = \pi(t) \wedge (I^{-1}\pi(t)).$$

Il est facile de voir en utilisant l'équation d'Euler que

$$\frac{d}{dt}\|\pi(t)\|^2 = 0$$

et

$$\frac{d}{dt}\|I^{-1/2}\pi(t)\|^2 = 0.$$

Les quantités $F(\pi) = \|\pi\|^2$ et $G(\pi) = \|I^{-1/2}\pi\|^2$ sont des quantités conservées au cours du mouvement (des intégrales premières).

Application à l'étude du mouvement du corps solide

Les ensembles $F(\pi) = F_0$ et $G(\pi) = G_0$ sont respectivement une sphère et un ellipsoïde. Leur intersection est en général une sous-variété compacte connexe de dimension 1.
Par conséquent, $\pi(t)$ est en général périodique.
On peut démontrer que cela implique que $R(\cdot)$ est solution d'une équation différentielle de la forme

$$R'(t) = R(t)\tilde{\Omega}(t)$$

où $\tilde{\Omega}(t)$ est périodique.
En utilisant le théorème de Floquet, on peut voir que cela implique que pour presque toute condition initiale, il existe $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R(\cdot)$ est quasi-périodique à deux fréquences : ses composantes sont de la forme $f(t\omega_1, t\omega_2)$ où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est $\mathbb{Z}^2$-périodique : $\forall(k, l) \in \mathbb{Z}^2$, $f(x + k, y + l) = f(x, y)$.

Sommaire du cours 8

1. Plan cours 8
2. Mouvement du corps solide
3. Point fixe hyperbolique
   - Définition
   - Variétés stable/instable
   - Théorème de Hartman-Grobman

Point fixe hyperbolique
Problème

Nous nous proposons d'étudier la dynamique d'un champ de vecteurs $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ au voisinage d'un point x_0. Pour simplifier nous supposons le champ X complet.

- (i) Si x_0 est un point régulier de X ($X(x_0) \neq 0$) nous avons vu qu'il existait un voisinage $U \ni x_0$ et un difféomorphisme local $\varphi : U \to \varphi(U)$ tels que dans les nouvelles coordonnées données par φ le champ X devienne constant : $Y = \varphi_* X$ est un champ constant.
- (ii) Que peut-on dire au voisinage d'un point singulier x_0 (i.e. si $X(x_0) = 0$) ?

Dans le cas (ii), on ne peut en général pas donner une description complète de la dynamique sauf dans un cas important : quand x_0 est un point singulier hyperbolique.

Point fixe hyperbolique
Définition

Définition

On dit que x_0 est un point fixe hyperbolique de X si aucune des valeurs propres de $DX(x_0)$ n'est de partie réelle nulle.

On peut alors définir les espaces stable et instable ($\lambda \in Spec(DX(x_0))$:

$$\Gamma_s(x_0) = \bigoplus_{\Re\lambda<0} \Gamma_\lambda(DX(x_0)), \qquad \Gamma_u(x_0) = \bigoplus_{\Re\lambda>0} \Gamma_\lambda(DX(x_0))$$

$$\mathbb{R}^n = \Gamma_s \oplus \Gamma_u.$$

Point fixe hyperbolique
Exemple

Exemple : Le point $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ est un point fixe hyperbolique du champ de vecteurs :

$$\begin{cases} x' &= 2x + y + x^2 + y^3 \\ y' &= x + y + x^3 y^5. \end{cases} \tag{1}$$

Déterminer Γ_s et Γ_u.

Point fixe hyperbolique

Le problème qui nous intéresse est le suivant : dans quelle mesure la dynamique de $\dot{x}(t) = X(x(t))$ au voisinage de x_0 est-elle semblable à celle $\dot{x}(t) = DX(x_0) \cdot x(t)$?

- (i) Existe-t-il des solutions asymptotiquement stables (en $\pm\infty$) ?
- (ii) Est-il possible de conjuguer $X(\cdot)$ à sa partie linéaire $DX(x_0)$?

Point fixe hyperbolique
Variétés stable et instable

On peut reformuler la première question de la façon suivante.
Les espaces $\Gamma_{s,u}$ sont caractérisés de façon dynamique.
Γ_s (resp. Γ_u) est l'ensemble des conditions initiales v pour lesquels les solutions de $\dot{x}(t) = DX(x_0) \cdot x(t)$, $x(0) = v$ convergent vers 0 quand $t \to \infty$ (resp. $t \to -\infty$).
Existe-t-il des ensembles remarquables semblables dans le cas non-linéaire ?

Point fixe hyperbolique
Variétés stable et instable

Définition

Soit $\delta > 0$. Nous appelerons variété stable (resp. instable) locale de x_0 l'ensemble $W^s_\delta(x_0)$ (resp. $W^u_\delta(x_0)$) des $x \in B(x_0, \delta)$ pour lesquels, pour tout $t \geqslant 0$ (resp. $t \leqslant 0$)

$$\phi^t_F(x) \in B(x_0, \delta).$$

Remarque : Il n'est pas du tout clair à ce stade que ces ensembles soient non-vides et soient des (sous-)variétés.

Point fixe hyperbolique
Théorème de la variété stable (instable)

Théorème (de la variété stable)

Soit $x_0 = 0$ *un point fixe* hyperbolique *d'un champ de vecteurs* X *de classe* C^k $(k \geqslant 1)$ *et tel que* $\Gamma_s \neq \{0\}$ *(resp.* $\Gamma_u \neq \{0\}$*)*

- *i) Il existe alors un* $\delta > 0$ *et une application* w_s *(resp.* w_u*) de classe* C^k *d'un voisinage* V_s *(resp.* V_u*) de* $0 \in \Gamma_s$ *(resp.* Γ_u*) dans un voisinage de* $0 \in \Gamma_u$ *(resp. de* $0 \in \Gamma_s$*) tels que* $W^s_\delta(0)$ *(resp.* $W^u_\delta(x_0)$*) est le graphe de l'application* w_s *(resp.* w_u*) :*

$$W^*_\delta(x_0) = \{x_* + w_*(x_*), x_* \in V_*\}, \quad * = s, u.$$

  En outre $T_{x_0} W^*_\delta = \Gamma_*$.
- *ii) Pour tout* $x \in W^s_\delta(x_0)$ *et tout* $0 \leqslant \rho < \tilde{\rho} := \min_{\lambda \in Spec(DX(x_0))}(|\Re\lambda|)$ *on a*

$$\lim_{t \to \infty} e^{\rho t} \|\phi^t_X(x)\| = 0.$$

Point fixe hyperbolique
Variétés stable et instable

Ce théorème garantit donc, dans le cas hyperbolique, la non vacuité des variétés stables et instable (pourvu que E_s, E_u soient non vides) et montre que la stabilité topologique d'une orbite entraîne sa stabilité asymptotique.

Point fixe hyperbolique
Conjugaison topologique

Deuxième problème : la conjugaison à la partie linéaire :
En général, on ne peut pas conjuguer X à sa partie linéaire par un difféomorphisme C^1.
En revanche, on peut conjuguer par un homéomorphisme, les flots de $X(\cdot)$ et de $DX(x_0)$.

Point fixe hyperbolique
Théorème de Hartman-Grobman

Théorème (Hartman-Grobmann)

Si x_0 *est un point fixe* hyperbolique *de* $X(\cdot)$ *alors il existe un voisinage* U *de* x_0 *et un homéomorphisme* h *de* U *sur son image qui conjugue les flots de* $X(\cdot)$ *et de* $DX(x_0)$ *: partout où ceci a un sens*

$$h \circ \phi^t_X(x) = e^{tDX(x_0)} \cdot h(x).$$