MAT 431, 2011-2012, Feuille 3

Exercice 1

$\Rightarrow$ trivial

$\Leftarrow$ découle de l'unicité dans CYL : $t \mapsto X(t)$ et $t \mapsto X(t+T)$ solut° du m̂ pb CY.

Exercice 2

Déf. $R(T,0)$ "elliptique" signifie qu'elle admet 2 vap $\mathbb{C}$ conj sur le cercle unit

Rappels ① Théorie de Floquet

$\dot{x} = A(t)x$ avec A T-périodique

$R(t) := R(t,0)$

Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $R(T) = e^{TB}$

Alors $R(t) = U(t)\, e^{tP}$ où $U(t)$ est une matrice inversible T-périodique

0 stable $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{R}e[Sp(P)] \leq 0$ et P diagonalisable / vap $\mathcal{R}e = 0$)

$\Leftrightarrow$ ($R(T)$ a ses vap de module ≤ 1 et $R(T)$ diagonalisable / vap de module $= 1$)

② Thm Liouville : $\det[R(t,t_0)] = \exp\left[\int_{t_0}^{t} Tr(A(s))\,ds\right]$

Preuve : $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$ (polynômiale) et $R(\cdot,t_0) : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $\mathcal{C}^\infty$ d'après le cours donc $t \mapsto \det[R(t,t_0)]$ est dérivable et

$$\frac{d}{dt}\det[R(t,t_0)] = d(\det)(R(t,t_0)) \cdot \frac{\partial R}{\partial t}(t,t_0)$$

$$= Tr[\det(R(t,t_0))\, R(t,t_0)^{-1} A(t) R(t,t_0)] \quad \downarrow Tr(AB) = Tr(BA)$$

$$= \det[R(t,t_0)]\; Tr[A(t)]$$

donc $\det[R(t,t_0)] = \exp\left[\int_{t_0}^{t} Tr[A(s)]\,ds\right]$. ■

$$x'' + \gamma x' + a(t)x = 0 \iff \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & -\gamma \end{pmatrix}}_{=: A_\gamma(t)} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

$\left|\begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \gamma \mapsto R_\gamma(T)\end{array}\right.$ est continue (cours) et $\left|\begin{array}{l}\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ M \mapsto \Delta(M) := Tr(M)^2 - 4\,Det(M)\end{array}\right.$ aussi

donc $\gamma \mapsto \Delta[R_\gamma(T)]$ est continue. Or $\Delta[R_0(T)] < 0$ puisque $R_0(T)$ admet 2 vap complexes conjuguées, donc $\exists \gamma^* > 0 \mid \forall \gamma \in (0,\gamma^*)$

$\Delta[R_\gamma(T)] < 0$, ie $R_\gamma(T)$ admet 2 vap complexes conj : λ_γ et $\overline{\lambda_\gamma}$

D'après le thm de Liouville

$$|\lambda_\gamma|^2 = \lambda_\gamma \overline{\lambda_\gamma} = \det[R_\gamma(T)] = \exp\left[\int_0^T \mathrm{Tr}(A_\gamma(s))\,ds\right] = e^{-\gamma T} < 1$$

donc (cf rappel de la théorie de Floquet) 0 est stable (et m̂ asymptotiquement stable) quand $\gamma \in (0, \gamma^*)$.

Exercice 3

(i) $x'' + a(t)x = 0 \iff \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(t) & 0 \end{pmatrix}}_{:= A(t)} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$

Liouville : $\det[R(t,s)] = \mathrm{Exp}\left[\int_s^t \mathrm{Tr}(A(s))\,ds\right] = 1$

(ii) $x'' + a(t)x = f$ MVC

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}(t) = R(t,0)\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} + \int_0^t R(t,s)\begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds$$

(iii) ?

$$z'' + (\omega^2 + \varepsilon \cos(t))z = 0 \quad (1) \qquad \varepsilon \in \mathbb{R} \qquad 0 < \omega < 10 \qquad T := 2\pi$$

Exercice 4

$$\Longleftrightarrow \quad Z' = A_\varepsilon(t) Z \quad (2) \qquad Z = \begin{pmatrix} z \\ z' \end{pmatrix} \qquad A_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\omega^2+\varepsilon\cos t) & 0 \end{pmatrix}$$

$R_\varepsilon(t;0)$ résolvante associée

$x_\varepsilon, y_\varepsilon$ solutions de (1) avec $\begin{cases} x_\varepsilon(0) = 1 \\ x_\varepsilon'(0) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y_\varepsilon(0) = 0 \\ y_\varepsilon'(0) = 1 \end{cases}$

1) (a) Liouville $\det[R_\varepsilon(t;0)] = e^{\int_0^t \mathrm{Tr}(A_\varepsilon(s))ds} = 1$

(b) $$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_\varepsilon & y_\varepsilon \\ x_\varepsilon' & y_\varepsilon' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\varepsilon' & y_\varepsilon' \\ x_\varepsilon'' & y_\varepsilon'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\varepsilon' & y_\varepsilon' \\ -(\omega^2+\varepsilon\cos t)x_\varepsilon & -(\omega^2+\varepsilon\cos t)y_\varepsilon \end{pmatrix} = A_\varepsilon(t)\begin{pmatrix} x_\varepsilon & y_\varepsilon \\ x_\varepsilon' & y_\varepsilon' \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x_\varepsilon & y_\varepsilon \\ x_\varepsilon' & y_\varepsilon' \end{pmatrix}(0) = I_2$ L'unicité de la solution de $\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t}(t;0) = A_\varepsilon(t)R(t;0) \\ R(0;0) = I_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow R_\varepsilon(t;0) = \begin{pmatrix} x_\varepsilon(t) & y_\varepsilon(t) \\ x_\varepsilon'(t) & y_\varepsilon'(t) \end{pmatrix}$$

(c) Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ les vap de $R_\varepsilon(2\pi;0)$. Comme $\det[R_\varepsilon(2\pi;0)] = 1$ alors $\lambda_1\lambda_2 = 1$.

Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ alors $|\mathrm{Tr}[R_\varepsilon(2\pi;0)]| = |\lambda_1 + \frac{1}{\lambda_1}| \geqslant 2$, ce qui est impossible.

Donc $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ et $1 = |\lambda_1|^2$ donc $\lambda_1 = e^{i\omega T}$ où $\omega \in \mathbb{R}$

On a $2 > |\mathrm{Tr}[R_\varepsilon(2\pi;0)]| = |e^{i\omega T} + e^{-i\omega T}| = |2\cos(\omega T)|$ donc $\omega T \notin \pi\mathbb{Z}$ ie $\lambda_1 \neq \lambda_2$

En particulier, $R_\varepsilon(2\pi;0)$ est diagonalisable : $\exists Q \in GL_2(\mathbb{C})$ tq $R_\varepsilon(2\pi;0) = Q^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\omega T} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega T} \end{pmatrix} Q$

Ainsi $R(T;0) = e^{TP}$ où $P := Q^{-1}\begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix} Q$. D'après le thm de Floquet,

$\exists U : \mathbb{R} \to GL_2(\mathbb{C})$, 2π périodique, tq $R_\varepsilon(t;0) = U(t)e^{tP} = U(t)Q^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix} Q$.

En ccl toute solution de (1) est bornée ds $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

(d) Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ les vap de $R_\varepsilon(2\pi;0)$. On a vu que $\lambda_1\lambda_2 = 1$.

La cdt $|\mathrm{Tr}[R_\varepsilon(2\pi;0)]| > 2$ impose que $\lambda_1 \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ donc $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1} \neq \lambda_1$.

En particulier $R_\varepsilon(2\pi;0)$ est diagonalisable : $\exists Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $R_\varepsilon(2\pi;0) = Q^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} Q$

<u>1er Cas : λ_1 et $\lambda_2 > 0$</u>. Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$ tq $\lambda_1 = e^{\omega T}$. Alors $R_\varepsilon(2\pi;0) = e^{TP}$ où

$P = Q^{-1}\begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & -\omega \end{pmatrix} Q$. D'après le thm de Floquet, $\exists U : \mathbb{R} \to GL_2(\mathbb{R})$ 2π-périodique tq

$$R_\varepsilon(t;0) = U(t)e^{tP} = U(t)Q^{-1}\begin{pmatrix} e^{\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\omega t} \end{pmatrix} Q.$$

- Si $X_0 = Q^{-1}(\alpha e_1 + \beta e_2)$ alors $R_\varepsilon(t;0)X_0 = U(t)[\alpha e^{\omega t} Q^{-1} e_1 + \beta e^{-\omega t} Q e_2]$ est non bornée en $+\infty$ si $\alpha \neq 0$, non bornée en $-\infty$ si $\beta \neq 0$.
- $\exists$ une solution qui $\xrightarrow[t\infty]{} 0$: prendre $\alpha = 0$ et $\beta = 1$
- Toute solution non proportionnelle (ie avec $\alpha \neq 0$) a une norme $\xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$.

Cas : λ_1 et $\lambda_2 < 0$. Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$ tq $|\lambda_1| = e^{\cdots}$. Alors $\lambda_1 = -e^{\cdots} = e^{\cdots}$ et

$R_\varepsilon(2\pi;0) = e^{TP}$ où $P = Q^{-1}\begin{pmatrix} \omega + i\frac{\pi}{T} & 0 \\ 0 & -(\omega + i\frac{\pi}{T}) \end{pmatrix} Q$. D'après le thm de Floquet,

$\exists U : \mathbb{R} \to Gl_2(\mathbb{C})$ 2π-périodique tq $R_\varepsilon(t;0) = U(t) Q^{-1} \begin{pmatrix} e^{(\omega + i\frac{\pi}{T})t} & 0 \\ 0 & e^{-(\omega+i\frac{\pi}{T})t} \end{pmatrix} Q$.

- Si $X_0 = Q^{-1}(\alpha e_1 + \beta e_2)$ alors $R_\varepsilon(t;0) = U(t)\left[\alpha e^{(\omega+i\frac{\pi}{T})t} Q^{-1} e_1 + \beta e^{-(\omega+i\frac{\pi}{T})t} Q^{-1} e_2\right]$ est non bornée $[t \to +\infty]$ si $\alpha \neq 0$, non bornée $[t \to -\infty]$ si $\beta \neq 0$.
- $\exists$ solution $\xrightarrow[t \to \infty]{} 0$: $\alpha = 0$, $\beta = 1$
- Toute sol non $\div$ (ie $\alpha \neq 0$) a une norme $\xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$.

(ii) $\left|\begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ (t, Z, \varepsilon) \mapsto A_\varepsilon(t) Z \end{array}\right.$ est $\mathcal{C}^\infty$

Pour $\varepsilon = 0$, $\begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) \end{pmatrix}$ est solution de $\left|\begin{array}{l} Z' = A_0(t) Z \\ Z(0) = e_1 \end{array}\right.$ sur l'intervalle fermé $[0, 2\pi]$

D'après le thm de CYL à paramètre, $\exists \varepsilon^* > 0$ tq $\left|\begin{array}{l} (-\varepsilon^*, \varepsilon^*) \to \mathcal{C}^0([0,2\pi], \mathbb{R}^2) \\ \varepsilon \mapsto Z_\varepsilon \text{ solution } \left|\begin{array}{l} Z_\varepsilon' = A_\varepsilon(t) Z_\varepsilon \\ Z_\varepsilon(0) = e_1 \end{array}\right. \end{array}\right.$

soit $\mathcal{C}^\infty$. En particulier (Taylor), on a un DL

$Z_\varepsilon = Z_0 + \varepsilon Z_1 + \varepsilon^2 Z_2 + O_3(\varepsilon)$ où $Z_0, Z_1, Z_2, O_3(\varepsilon) \in \mathcal{C}^0([0,2\pi], \mathbb{R}^2)$ et $\exists C > 0$ tq

$\forall \varepsilon \in (-\varepsilon^*, \varepsilon^*)$, $\|O_3(\varepsilon)\|_{L^\infty(0,2\pi)} \leqslant C\varepsilon^3$.

On en déduit que $x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + O_3(\varepsilon)$ avec ...
(1ère comp de Z_ε)

$$x_0'' + \varepsilon x_1'' + \varepsilon^2 x_2'' + O_3(\varepsilon)'' + (\omega^2 + \varepsilon\cos(t))(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + O_3(\varepsilon)) = 0$$

Par identification, on obtient

$\begin{cases} x_0'' + \omega^2 x_0 = 0 \\ x_0(0) = 1 \\ x_0'(0) = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1'' + \omega^2 x_1 + \cos(t) x_0(t) = 0 \\ x_1(0) = x_1'(0) = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_2'' + \omega^2 x_2 + \cos(t) x_1(t) = 0 \\ x_2(0) = x_2'(0) = 0 \end{cases}$

$x_0(t) = \cos(\omega t)$

(iii) ① $\cancel{x_0(2\pi) = \cos(2\pi\omega)}$

$\cancel{\begin{cases} y_0'' + \omega^2 y_0 = 0 \\ y_0(0) = 0 \\ y_0'(0) = 1 \end{cases}} \cancel{\to y_0(t) = \frac{\sin(\omega t)}{\omega}}$ $\quad \cancel{y_0'(2\pi) = \cos(2\pi\omega)}$.

② $\cancel{\left|\begin{array}{l} L_\omega : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ z \longmapsto z'' + \omega^2 z \end{array}\right.}$

iii) 1 Calculer $x_0(2\pi,\omega)$ et $y_0(2\pi,\omega)$

$$\begin{cases} x_0'' + \omega^2 x_0 = 0 \\ x_0(0) = 1 \\ x_0'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0(t) = \cos(\omega t)$$

donc $\underline{x_0(2\pi,\omega) = \cos(2\pi\omega)}$

$$\begin{cases} y_0'' + \omega^2 y_0 = 0 \\ y_0(0) = 0 \\ y_0'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow y_0(t) = \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$$

donc $\underline{y_0'(2\pi,\omega) = \cos(2\pi\omega)}$

2 <u>Changement d'énoncé</u>: Mq. $x_1(2\pi,\omega) + y_1'(2\pi,\omega) = 0, \ \forall \omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1'' + \omega^2 x_1 + \cos(t)\, x_0(t) = 0 \\ x_1(0) = x_1'(0) = 0 \end{cases} \overset{\text{MVC}}{\Rightarrow} x_1(t,\omega) = -\int_0^t \cos(\tau)\cos(\omega\tau)\sin[\omega(t-\tau)]\,d\tau$$

donc $\underline{x_1(2\pi,\omega) = -\int_0^{2\pi} \cos(t)\cos(\omega t)\sin[\omega(2\pi - t)]\,dt}$

$$\begin{cases} y_1'' + \omega^2 y_1 + \cos(t)\, y_0(t) = 0 \\ y_1(0) = y_1'(0) = 0 \end{cases} \overset{\text{MVC}}{\Rightarrow} y_1(t,\omega) = -\int_0^t \cos(\tau)\frac{\sin(\omega\tau)}{\omega}\sin[\omega(t-\tau)]\,d\tau$$

donc $y_1'(t,\omega) = -\int_0^t \cos(\tau)\sin(\omega\tau)\cos[\omega(t-\tau)]\,d\tau$

en particulier $\underline{y_1'(2\pi,\omega) = -\int_0^{2\pi} \cos(t)\sin(\omega t)\cos[\omega(2\pi-t)]\,dt}$

ainsi $x_1(2\pi,\omega) + y_1'(2\pi,\omega) = -\int_0^{2\pi} \cos(t)\underbrace{\Big[\cos(\omega t)\sin[\omega(2\pi-t)] + \sin(\omega t)\cos[\omega(2\pi-t)]\Big]}_{=\sin[\omega(2\pi - \cancel{t}) + \cancel{\omega t}] = \sin(2\pi\omega)}\,dt$

$= -\sin(2\pi\omega)\int_0^{2\pi}\cos(t)\,dt = 0.$

4
$$\left| \begin{array}{l} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t, z, \omega) \longmapsto \begin{pmatrix} z_2 \\ -\omega^2 z_1 - \cos(t)\, x_{1\omega}(t) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$ est $\mathcal{C}^\infty$.

Pour $\omega = 1/2$ et la CI $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, on a une solution $\begin{pmatrix}x_2\\x_2'\end{pmatrix}$ définie sur l'intervalle <u>FERMÉ</u> $[0,2\pi]$ (elle est globale : syst linéaire).

D'après CYL à paramètre, $\exists\, \delta > 0$ tq l'application

$$\left| \begin{array}{l} (1/2-\delta, 1/2+\delta) \longrightarrow \mathcal{C}^0([0,2\pi],\mathbb{R}^2) \\ \omega \longmapsto \begin{pmatrix}x_{2\omega}\\x_{2\omega}'\end{pmatrix} \text{ solution de } \begin{cases} x_{2\omega}'' + \omega^2 x_{2\omega} + \cos(t)\, x_{1\omega} = 0 \\ x_{2\omega}(0) = x_{2\omega}'(0) = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

soit continue. En particulier, $\omega \longmapsto x_{2\omega}(2\pi)$ est continue sur $(1/2-\delta, 1/2+\delta)$.

$$x_{2,1/2}(2\pi) = \lim_{\omega\to 1/2} x_{2\omega}(2\pi)$$

Notons $\omega = \frac{1}{2} + u$. Alors

$$
\begin{aligned}
x_{2,\omega}(2\pi) &= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+2\omega} + \frac{1}{1-2\omega}\right)\frac{\pi}{\omega}\sin(2\pi\omega) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2+2u} + \frac{1}{-2u}\right)\frac{\pi}{\frac{1}{2}+u}\sin(\pi + 2\pi u) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+u} - \frac{1}{u}\right)\frac{\pi}{1+2u}\sin(\pi + 2\pi u) \\
&= \left[\frac{1}{4u} + O(1)\right] \times \left[\pi + O(u)\right] \times \left[-2\pi u + O(u^2)\right] \\
&= \left[-\frac{\pi}{2} + O(u)\right] \times \left[\quad\right] \\
&= -\frac{\pi^2}{2} + O(u).
\end{aligned}
$$

Ainsi $x_{2,\omega}(2\pi) = -\pi^2/2$ en $\omega = 1/2$

De même,

$$
\begin{aligned}
y'_{2,\omega}(2\pi) &= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2+2u} + \frac{1}{-2u}\right)\pi\sin(\pi + 2\pi u) \\
&= \left(\frac{\pi}{8u} + O(1)\right) \times \left(-2\pi u + O(u^2)\right) \\
&= -\frac{\pi^2}{4} + O(u).
\end{aligned}
$$

Ainsi $y'_{2,1/2}(2\pi) = \pi^2/4$

iv) 1
$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left[R_{\varepsilon,\omega}(2\pi,0)\right] &= (x_{\varepsilon,\omega} + y'_{\varepsilon,\omega})(2\pi) \\
&= (x_{0,\omega} + y'_{0,\omega})(2\pi) && \to 2\cos(2\pi\omega) \quad \text{cf (ii 1} \\
&+ \varepsilon\,(x_{1,\omega} + y'_{1,\omega})(2\pi) && \to 0 \quad \text{cf (ii} \\
&+ \varepsilon^2\,(x_{2,\omega} + y'_{2,\omega})(2\pi) && \to -\frac{3\pi^2}{4} + O(u) \quad \text{cf (ii} \ (\omega = 1/2 + u) \\
&+ O(\varepsilon^3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos(2\pi\omega) &= \cos(\pi + 2\pi u) \\
&= \cos(\pi) + 2\pi u \cancel{\cos'(\pi)} + \frac{1}{2}(2\pi u)^2\cos''(\pi) + O(u^3) \\
&= -1 + 2\pi^2 u^2 + O(u^3)
\end{aligned}
$$

Donc $\mathrm{Tr}\left[R_{\varepsilon\omega}(2\pi,0)\right] = -2 + 4\pi^2 u^2 - \frac{3\pi^2}{4}\varepsilon^2 + \underbrace{O(\varepsilon^3 + u^3 + \varepsilon^2 u)}_{O(\varepsilon^3 \ \ u^3)}$

iv) ② Fixons $\delta > 0$ et restreignons-nous au (ε, δ) tq $|\varepsilon| \geq (\sqrt{\tfrac{16}{3}} + \delta)|u|$.

Alors $\mathrm{Tr}\left[R_{\varepsilon\omega}(2\pi;0)\right] = -2 - \pi^2\left[\dfrac{3\varepsilon^2}{4} - 4u^2\right] + O(\varepsilon^3 + u^3)$ (*)

$$\leq -2 - \pi^2 \underbrace{\left[\frac{3}{4} - 4\left(\sqrt{\frac{16}{3}} + \delta\right)^{-2}\right]}_{=m_\delta}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$

$\sqrt{\frac{16}{3}} + \delta > \sqrt{\frac{16}{3}}$ donc $\left(\sqrt{\frac{16}{3}} + \delta\right)^{-2} < \frac{3}{16}$ d'où $m_\delta > 0$

Soit $C > 0$ tq $|O(\varepsilon^3)| \leq C\varepsilon^3$.

$C\varepsilon^3 \leq \frac{1}{2}\pi^2 m \varepsilon^2 \Leftrightarrow \varepsilon < \varepsilon_0 := \dfrac{\pi^2 m_\delta}{2C}$

Pour tout $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ et tout u tq $|\varepsilon| \geq (\sqrt{\frac{16}{3}} + \delta)|u|$, on obtient

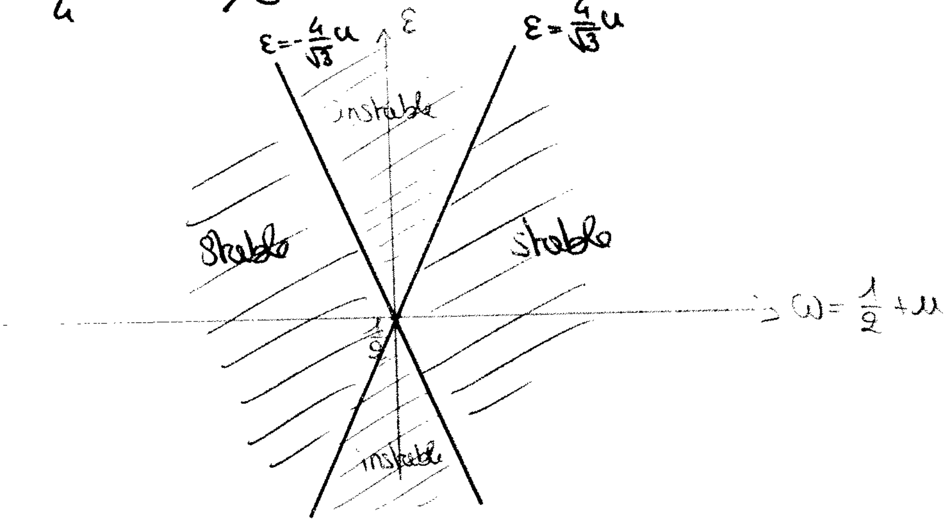
$\mathrm{Tr}\left[R_{\varepsilon\omega}(2\pi, 0)\right] \leq -2 - \dfrac{\pi^2 m}{2} < 0.$

Donc (Théorie de Floquet) 0 est instable.

iv) ③ D'après, au voisinage de $(\omega = 1/2, \varepsilon = 0)$

stable $\Leftarrow$ $\dfrac{3\varepsilon^2}{4} - 4u^2 < 0$

instable $\Leftarrow$ $\dfrac{3\varepsilon^2}{4} - 4u^2 > 0$



Exercice 5

cf exos 2 et 4

Exo 6

$x'' + x = \mu\left[(1+\cos(t))\sin(x) + \cos(2t)\right]$

$\iff \dfrac{dX}{dt} = AX + \mu F(X,t)$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $F(X,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ (1+\cos t)\sin(x_1) + \cos(2t) \end{pmatrix}$

(i) $X_{0,v}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

(ii) $|F(X,t)| \leqslant 2\|X\| + 1$ cf exo précédent (n° 8 feuille 2)

(iii) $\Rightarrow$ est triviale, $\Leftarrow$ résulte de l'unicité CYL
(TVC)

(iv) ① Théorème de dépendance différentiable / paramètre et CI :
On montre qu'elle est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $(\mu,v) = 0$

$P_{(\mu,v)} \begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = G(t,X,\mu) \\ X(0) = v \end{cases}$ $\qquad G \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^2_X \times \mathbb{R}_\mu, \mathbb{R}^2)$

Pour $(\mu,v) = (0,0)$ on dispose d'une solution $X_{0,0}(t) \equiv 0$ globale.

$\exists \mu^* > 0$, $\Omega \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}^2}(0)$ tq $\forall (\mu,v) \in (-\mu^*,\mu^*) \times \Omega$, $P_{\mu,v}$ admette une unique solution $\underbrace{X_{\mu,v}}_{\text{définie sur }[0,2\pi]}$ et l'application $\left| \begin{array}{l} (-\mu^*,\mu^*) \times \Omega \to \mathcal{C}^1([0,2\pi],\mathbb{R}^2) \\ (\mu,v) \mapsto X_{\mu,v} \end{array} \right.$ est $\mathcal{C}^\infty$

TRm des f^n composées $\Rightarrow H \in \mathcal{C}^\infty$

② (T)

③ $\int_0^{2\pi} \cos(2s)\sin(s)\,ds = \int_0^{2\pi} \cos(2s)\cos(s)\,ds = 0$

④ D'après ③

$D_v H(0,0).V = \begin{pmatrix} -\int_0^{2\pi} (1+\cos(s))(v_1\cos(s) + v_2\sin(s))\sin(s)\,ds \\ \int_0^{2\pi} (\qquad)(\qquad)\cos(s)\,ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi v_2 \\ \pi v_1 \end{pmatrix}$

$\int_0^{2\pi} (\cancel{1}+\underbrace{\cancel{\cos(s)}) \cos(s)\sin(s)}_{\text{impair}/s=\pi}\,ds = 0$

$\int_0^{2\pi} (1+\underbrace{\cancel{\cos(s)}) \sin(s)^2}_{\text{imp}/s=\pi}\,ds = \int_0^{2\pi} \dfrac{1-\cancel{\cos(2s)}}{2}\,ds = \pi$

$\int_0^{2\pi} (1+\cos(s))\cos(s)^2\,ds = \pi$ (idem)

$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
$= 2\cos^2\theta - 1$
$= 1 - 2\sin^2\theta$

⑤ $D_v H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ \pi & 0 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$

TFI ...

Exercice 7

$\begin{cases} x' = -x + y^2 \\ y' = -y + x^2 \end{cases}$ Linéarisé autour de $(x \equiv 0,\ y \equiv 0)$ $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ asympt. stable

$\Rightarrow$ localement le NL est asymptotiquement stable

Preuve. TVC $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) \overset{TVC}{=} e^{-t} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{-(t-s)} \begin{pmatrix} y(s)^2 \\ x(s)^2 \end{pmatrix} ds$

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t) \right\| \leqslant e^{-t} \|(x_0, y_0)\| + \int_0^t e^{-(t-s)} \left\| \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} \right\|^2 ds$$

Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tq $\|(x_0, y_0)\| < 1$.

Montrons que $\|(x,y)(t)\| \leqslant \|(x_0, y_0)\|$ $\forall t > 0$.

Soit $T := \sup\{ t > 0 \ ; \ \|(x,y)\| \leqslant 1 \text{ sur } [0,T] \} \in (0, +\infty]$

Par l'absurde, on suppose $T < +\infty$ Alors $\forall t \in [0,T]$

$e^{t} \|(x,y)(t)\| \leqslant \|(x_0, y_0)\| + \int_0^t e^{s} \|(x,y)(s)\| ds$ grâce à

Gronwall $\Rightarrow$ $\cancel{e^{t}} \|(x,y)(t)\| \leqslant \|(x_0, y_0)\| \cancel{e^{t}}$ $\forall t \in [0,T]$

En particulier $\|(x,y)(T)\| \leqslant \|(x_0, y_0)\| < 1$. Contradiction.

Ainsi $T = +\infty$ et $\|(x,y)(t)\| \leqslant \|(x_0, y_0)\|$, $\forall t$

$\Rightarrow$ 0 est stable localement

Ex 8 ⓐ $\varphi, g, f \in \mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R}^+)$

$$\varphi(t) \leqslant f(t) + \int_0^t g(s)\varphi(s)\,ds \quad , \forall t \in [0,T]$$

Mq $\varphi(t) \leqslant f(t) + \int_0^t g(s) f(s) e^{\int_s^t g(\tau)d\tau} ds$

Soit $F(t) := \int_0^t g(s)\varphi(s)\,ds \quad \in \mathcal{C}^1([0,T]\,\mathbb{R}^+)$.

alors $F' = g\varphi \leqslant g(f+F)$ car $g \geqslant 0$

donc $\frac{d}{dt}\left[F(t) e^{-\int_0^t g} \right] \leqslant g(t) f(t) e^{-\int_0^t g}$

Comme $F(0)=0$, $\quad F(t) \leqslant \int_0^t g(\tau) f(\tau) e^{\int_\tau^t g(s)ds} d\tau$

d'où $\varphi(t) \leqslant f(t) + F(t) \leqslant \ldots$

ⓑ $A \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $p \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ tq $\int_0^\infty \|A(t)\| dt < \infty$ et $\int_0^\infty \|p(t)\| dt < \infty$

Mq $\dot{x} = A(t)x + p \Rightarrow \sup_{0 \leqslant t < \infty} \|x(t)\| < \infty$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \left[A(s)x(s) + p(s)\right] ds$$

$$\|x(t)\| \leqslant \underbrace{\left[\|x_0\| + \int_0^\infty \|p\|\right]}_{=f(t) := M} + \int_0^t \underbrace{\|A(s)\|}_{:= g(s)} \|x(s)\|\, ds$$

$$\|x(t)\| \leqslant M + M\left(\int_0^\infty \|A(s)\|ds\right) e^{\int_0^\infty \|A(s)\|ds}.$$

Ex 9 Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ localement lipschitz $/ x \in \mathbb{R}^n$ et tq $\exists \alpha, \beta \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ tq $\langle f(x,t), x \rangle \leqslant \alpha(t) + \beta(t)\|x\|^2$. Mq toute sol max de $\dot{x} = f(x,t)$ est déf sur $(0, +\infty)$ Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Soit x la solution maximale de $\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

D'après le cours, elle est définie sur un intervalle de la forme $[0,T)$ où $T \in]0, +\infty]$.

ou bien $T = +\infty$

ou bien $T < +\infty$ et alors x n'est pas bornée au voisinage de T

Supposons $T < +\infty$. Pour tout $t \in (0,T)$, on a

$\frac{d}{dt}\|x(t)\|^2 = 2\langle x(t), f(x(t),t)\rangle \leqslant 2\alpha(t) + 2\beta(t)\|x(t)\|^2$ donc

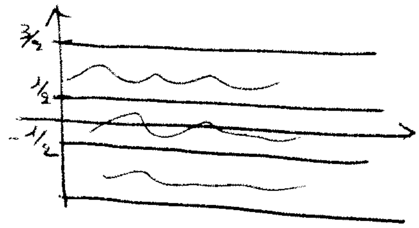
$\|x(t)\|^2 \leqslant \|x_0\|^2 + 2\int_0^t \alpha(s)ds + 2\int_0^t \beta(s)\|x(s)\|^2 ds$ donc (Lemme Gronwall)

$\|x(t)\|^2 \leqslant \left(\|x_0\|^2 + 2\int_0^T \alpha\right) e^{2\int_0^T \beta}$, $\forall t \in (0,T)$: Contradiction

Exercice 10

a) Pour tout x_0 de la forme $k+\frac{1}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, la solution de CI $x(0)=x_0$ est constante car $\cos\left(\pi(k+\frac{1}{2})\right)=0$

$\Rightarrow$ soluts bornées donc globales



b) $\dot{x} = 1+t^2+x^2$

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Arctan}[x(t)] = \frac{\dot{x}}{1+x^2} = 1 + \frac{t^2}{1+x^2}$$

$$\frac{\pi}{2} \geqslant \operatorname{Arctan}[x(t)] = \operatorname{Arctan}[x_0] + t + \int_0^t \frac{s^2}{1+x(s)^2}\,ds \geqslant \operatorname{Arctan}(x_0)+t$$

$\rightarrow$ temps de vie fini (sur $\mathbb{R}_+$) $t_{max} \leqslant \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x_0)$.

$$\begin{cases} \dot{x} = 1-t^2+x^2 \\ x(0)=x_0>0 \end{cases}$$

$y(t) = x(t)-t$ satisfait $\begin{cases} \dot{y} = -t^2+(y+t)^2 = y^2+2ty \\ y(0)=x_0>0 \end{cases}$

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{y(t)} = -\frac{\dot{y}}{y^2} = -1-\frac{2t}{y}$$

$$\frac{1}{y(t)} = \frac{1}{y_0} - t - \int_0^t \frac{2s}{y(s)}\,ds \leqslant \frac{1}{y_0} - t$$

tant que y reste >0, ce qui est tjs le cas :

$$\frac{d}{dt}\, y e^{-t^2} = (\dot{y}-2ty)e^{-t^2} = y^2 e^{-t^2} \geqslant 0$$

donc $y(t) \geqslant y_0 e^{t^2} > 0$

Ainsi $y(t) \geqslant \dfrac{y_0}{1-y_0 t}$ explose en temps fini

$\boxed{\text{Exercice 11}}$

a) <u>Montrons que $x_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} x$ uniformément sur tout compact de $[c, d[$</u>

Soit $d^* \in]c, d[$.

$\exists R > 0 \mid \quad \|x(t)\| \leq R, \ \forall t \in [c, d^*]$.

$\exists L > 0 \mid \quad \|f(\tilde{x}, t) - f(\tilde{y}, t)\| \leq L \|\tilde{x} - \tilde{y}\|, \ \forall t \in [c, d^*], \forall \tilde{x}, \tilde{y} \in B_{\mathbb{R}^n}(0, 2R)$.

Soit $\varepsilon^* := \dfrac{R e^{-L(d^*-c)}}{\sqrt{m}\,(d^*-c)}$ et $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$.

Soit $T := \operatorname{Sup}\{t \in [c, d^*[\ ; \ \|x_\varepsilon - x\| < R \text{ sur } [c, t]\}$.

Comme $x_\varepsilon(c) = x(c)$ alors $T \in (c, d^*]$

<u>Par l'absurde, supposons $T < d^*$</u>. Alors (continuité) $\|(x_\varepsilon - x)(T)\| = R$.

On a $(x_\varepsilon - x)(t) = \displaystyle\int_c^t \big(f(x_\varepsilon(s), s) - f(x(s), s) - (\varepsilon, \dots \varepsilon)\big) ds \quad \forall t \in [c, d^*)$

$$\|(x_\varepsilon - x)(t)\| \leq \int_c^t \left(L \|x_\varepsilon(s) - x(s)\| + \sqrt{m}\,\varepsilon\right) ds, \quad \forall t \in [c, T]$$

donc (Gronwall) $\quad \|(x_\varepsilon - x)(t)\| \leq \sqrt{m}\,\varepsilon\,(d^* - c)\, e^{L(d^*-c)} \quad , \forall t \in [c, T]$

$< R$. <u>Contradiction</u> en $t = T$.

Ainsi $T = d^*$ et le raisonnement précédent mq

$$\|x_\varepsilon - x\|_{L^\infty(c, d^*)} \leq \sqrt{m}\,\varepsilon\,(d^* - c)\, e^{L(d^*-c)} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0.$$

Il résulte des ep $\left| \begin{array}{l} x' = f(x, t) \\ x_\varepsilon' = f(x_\varepsilon, t) + \varepsilon \end{array} \right.$ que <u>$x_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} x$ dans $\mathcal{C}^k([c, d^*])$ $\forall k \in \mathbb{N}$.</u>

b) ~~[illegible]~~ $\cancel{y(c) = x(c)}$

~~[illegible]~~ $\cancel{y_j(c) \leq x_j(c), \forall j}$

changer les composantes 1 à 1

On a $y_j(c) \leq x_j^\varepsilon(c)$ et $\dot{y}_j(c) = f(y_j(c), c) \leq f(x_j^\varepsilon(c), c)$

$< f(x_j^\varepsilon(c), c) + \varepsilon = \dot{x}_j^\varepsilon(c)$

donc $y_j < x_j^\varepsilon$ au voisinage de c^+, $\forall j$

Soit $T := \operatorname{Sup}\{t \in [c, d[\ , \ y_j < x_j^\varepsilon \text{ sur } (c, t), \ \forall j\}$.

<u>Par l'absurde, on suppose $T < d$</u>. Alors $\exists j \in [\![1, m]\!]$ tq

$y_j(T) = x_j^\varepsilon(T)$ et $y_i(t) < x_i^\varepsilon(t)$, $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall t \in]c,T[$.

Or $(\dot{y}_j - \dot{x}_j^\varepsilon)(T) \leqslant f_j(y(T),T) - f_j(x^\varepsilon(T),T) - \varepsilon$

la $j^{\text{ième}}$ composante coïncide et
$y_i(T) \leqslant x_i^\varepsilon(T)$ pour $i \neq j$

$\leqslant -\varepsilon < 0$

Ainsi $y_j - x_j^\varepsilon$ est < 0 sur $]c,T[$
$= 0$ en $t = T$
avec une dérivée < 0 en $t = T$: Contradiction.

c) On passe à la limite dans $x_j^\varepsilon(t) \geqslant y_j(t)$

Rq: La CNS suffirait en question a).

Exercice 12

a) $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} u \\ u' \\ u'' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u' \\ u'' \\ u u'' \end{pmatrix}$

F est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ donc CYL.

b) Pour $c \in \mathbb{R}$

$v_c(t) := \frac{3}{c-t}$, $v_c'(t) = \frac{+3}{(c-t)^2}$, $v_c''(t) = \frac{6}{(c-t)^3}$, $v_c'''(t) = \frac{18}{(c-t)^4}$ donc

$v_c''' = v_c v_c''$ sur $]-\infty, c[\cup]c, +\infty[$.

Pour tout $c \in]0, \sqrt[3]{6}]$, on a

$$\begin{pmatrix} v_c(0) \\ v_c'(0) \\ v_c''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/c \\ 3/c^2 \\ 6/c^3 \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \\ u''(0) \end{pmatrix}$$

donc (F est quasi-croissante sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$)

$$\begin{pmatrix} v_c(t) \\ v_c'(t) \\ v_c''(t) \end{pmatrix} \geqslant \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ u''(t) \end{pmatrix} \quad \forall t \in (0, c).$$

En particulier ($c = \sqrt[3]{6}$), (u, u', u'') n'explose pas avant $t = \sqrt[3]{6}$

$T_{max} \geqslant \sqrt[3]{6}$.