Examen du 6 mai 2014 - Durée 2h

Aucun document autorisé ni calculatrices, téléphones portables *etc.*

Exercice 1 On dispose de deux pièces de monnaie A et B truquées que l'on ne peut pas distinguer l'une de l'autre. Quand on lance la pièce A le côté pile sort avec probabilité p tandis que le lancer de la pièce B fait apparaître pile avec probabilité $1-p$. On choisit une des deux pièces au hasard et on la lance successivement deux fois. On se propose de répondre à la question suivante : sachant que pile apparaît lors du premier lancer, quelle est la probabilité que pile apparaisse lors du second lancer ?

On modélisera le problème de la façon suivante : Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et des variables aléatoires $L : \Omega \to \{A, B\}$, $X_1, X_2 : \Omega \to \{1, 0\}$ ($pile = 1$, $face = 0$) tels que : (i) $\mathbb{P}(L = A) = \mathbb{P}(L = B) = 1/2$ et (ii) $\mathbb{P}(X_i = 1|L = A) = p$, $\mathbb{P}(X_i = 1|L = B) = 1 - p$ (pour $i = 1, 2$). On suppose en outre que : (iii) X_1 et X_2 sont *indépendantes conditionnelement à* L c'est-à-dire que pour tout $l \in \{A, B\}$ et tout $(x_1, x_2) \in \{0, 1\}^2$ on a $\mathbb{P}(X_1 = x_1 \text{ et } X_2 = x_2|L = l) = \mathbb{P}(X_1 = x_1|L = l)\mathbb{P}(X_2 = x_2|L = l)$.

1. Que représentent dans le problème les variables aléatoires L, X_1, X_2 et la quantité $\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1)$?
2. Calculer en fonction de p les probabilités $\mathbb{P}(X_1 = 1)$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 1)$.
3. En déduire $\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1)$.
4. Comparer $\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1)$ à $1/2$.
5. Construire un espace $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et des variables aléatoires $L : \Omega \to \{A, B\}$, $X_1, X_2 : \Omega \to \{1, 0\}$ vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii).

Exercice 2

1. On suppose que U est une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$.
   (a) Calculer la fonction de répartition de la variable aléatoire $-\ln U$.
   (b) En déduire que $-\ln U$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.
   (c) Pour $\lambda > 0$, déterminer la loi de la variable aléatoire $(-1/\lambda)\ln U$.
2. Soient $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi de densité $\rho : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et bornée.
   (a) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $g(X_1)$ en fonction de g et de ρ. Que dire de l'espérance et de la variance de $g(X_i)$ pour $i \geq 2$?
   (b) Exprimer la fonction caractéristique de la v.a.r. $g(X_i)$ en fonction de ρ.
   (c) Démontrer que les variables aléatoires $g(X_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, admettent toutes la même loi.

(d) On pose $S_n(g) = g(X_1) + \cdots + g(X_n)$. Démontrer que la suite de v.a.r. $S_n(g)/n$ converge presque sûrement vers $\int_{\mathbf{R}} \rho(x)g(x)dx$.

(e) Démontrer pour tout $a \geq 0$ l'égalité :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left| \frac{S_n(g)}{n} - \int_{\mathbb{R}} \rho(x)g(x)dx \right| \leq \frac{a\sigma(g)}{\sqrt{n}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-x^2/2} dx$$

avec $(\sigma(g))^2 = \int_{\mathbb{R}} g^2(x)\rho(x)dx - \left(\int_{\mathbb{R}} g(x)\rho(x)dx \right)^2$.

3. On suppose à présent que $U_1, \ldots, U_n, \ldots$ est une suite de v.a.r. i.i.d suivant une même loi uniforme sur $[0, 1]$ et on pose pour $i \geq 1$, $X_i = -\ln U_i$.

(a) Expliquer pourquoi $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ est une suite de v.a.r. i.i.d et déterminer la densité ρ de leur loi commune.

(b) On pose $f(x) = e^{-x^4}(\sin x)\mathbf{1}_{]0,\infty[}(x)$, $g = f/\rho$ (ρ de la question 3a) et on définit comme dans la question 2 la v.a.r. $S_n(g) = g(X_1) + \cdots + g(X_n)$. Démontrer que pour n assez grand on a avec probabilité supérieure ou égale à 0.95

$$\int_0^\infty e^{-x^4} \sin x dx \in [\frac{S_n(g)}{n} - \frac{C}{\sqrt{n}}, \frac{S_n(g)}{n} + \frac{C}{\sqrt{n}}]$$

où $C \approx 1.96e$, e étant la base du logarithme népérien ($e \approx 2,718$). On rappelle que $(2\pi)^{-1/2} \int_{-c}^{c} e^{-t^2/2} dt = 0.95$ pour $c \approx 1.96$

Exercice 3

1. On suppose que Y est une v.a.r. suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (espérance μ, variance σ^2, densité $(2\pi\sigma^2)^{-1/2}e^{-(t-\mu)^2/2\sigma^2}$). Démontrer qu'il existe une v.a.r. $\tilde{Y}$ suivant une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ telle que $Y = \sigma\tilde{Y} + \mu$.
2. On rappelle que la fonction caractéristique d'une v.a.r. suivant une loi normale centrée réduite est la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$. Que vaut la fonction caractéristique d'une v.a.r. suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$?
3. On suppose que pour tout $n \geq 0$ la v.a.r. X_n suit une loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ (centrée de variance σ_n^2). Démontrer que si la suite de v.a.r. $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers une v.a.r. X alors X suit une loi normale centrée.

FIN