Lycée Condorcet **2015-2016**
MPSI2

Feuille d'exercices 6

Inégalités dans $\mathbb{R}$

1 ☞ Pour $a \in [1, +\infty[$, simplifier $\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.

2 ☞ Simplifier $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

3 On considère une suite arithmétique $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_1}}.$$

4 Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tels que

1) $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > 1/2$;
2) $\sqrt[4]{313+x} + \sqrt[4]{313-x} = 6$.

5 ☞ Vérifier que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$, on a $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}$.

6 Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante de réels strictement positifs. Soit k et n des entiers tels que $1 \leqslant k \leqslant n$. Montrer que $(u_1 u_2 \ldots u_k)^n \leqslant (u_1 u_2 \ldots u_n)^k$.

7 ☞ Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

8 Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

Indication. On pourra établir dans un premier temps que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$.

9 Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$. Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i}\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i a_j}{i+j-1}.$$

10 ☞ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n$ dans $[0, 1]$. Montrer que $\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i$.

11 **Inégalité de la moyenne géométrique.**

1) Soit $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$. On pose $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$y \longmapsto (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

En calculant de deux manières différentes f', montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$x^n - nxy^{n-1} + (n-1)y^n = (x-y)^2 \sum_{k=0}^{n-2} (n-1-k) x^k y^{n-2-k}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Montrer que $\dfrac{\alpha + (n-1)\beta}{n} \geqslant \sqrt[n]{\alpha \beta^{n-1}}$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}.$$

12 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

13 ☞ Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Montrer que
$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n.$$

14 ☞ **Inégalité de Cauchy-Schwarz.** Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

1) On suppose y non nul. Calculer le discriminant du polynôme du second degré $P(t) = \sum_{k=1}^{n} (x_k + t y_k)^2$.
2) En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$. Préciser les cas d'égalité.
3) Montrer l'inégalité de Minkowski : $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$.

15 Calculer $\sup\limits_{(x,y,z)\in S} (x + 2y + 3z)$ où $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Montrer que cette borne supérieure est atteinte et préciser en quel(s) point(s).

16 Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels tels que $(n-1)\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$. Montrer que tous les x_k ont le même signe.

17 Soit $x_1, x_2, \dots, x_n$ dans $\mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i = n$. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 1$.

18 ★ **Inégalité du réordonnement.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Soient $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels.
   a) On suppose qu'il existe $k \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $b_k \leqslant b_n$. Démontrer l'inégalité
   $$a_1 b_1 + \cdots + a_k b_n + \cdots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_k \leqslant a_1 b_1 + \cdots + a_k b_k + \cdots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n.$$
   b) On suppose de plus que $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Démontrer que si σ est une bijection de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$, on a
   $$a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \cdots + a_n b_{\sigma(n)} \leqslant a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$
2) Déduire de ce qui précède que si $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, pour toute bijection σ de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$, on a
   $$a_1 b_{\sigma(1)} + a_2 b_{\sigma(2)} + \cdots + a_n b_{\sigma(n)} \geqslant a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1.$$
3) Soient $p_1, p_2, \dots, p_n$ des entiers naturels non nuls deux à deux distincts. En utilisant la question précédente, montrer que
   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
4) Soient $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$.
   a) Montrer que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, on a :
   $$a_k b_1 + a_{k-1} b_2 + \cdots + a_2 b_{k-1} + a_1 b_k \leqslant a_1 b_1 + \cdots + a_k b_k$$
   $$\text{et} \quad a_n b_k + a_{n-1} b_{k+1} + \cdots + a_{k+1} b_{n-1} + a_k b_n \leqslant a_k b_k + \cdots + a_n b_n.$$
   b) En déduire l'inégalité de Tchebycheff :
   $$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_i b_i.$$
   c) Soit a, b, c des réels positifs. Montrer que $(a + b + c)^n \leqslant 3^{n-1}(a^n + b^n + c^n)$.

19 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Établir :
$$x_1 + (1 - x_1)x_2 + (1 - x_1)(1 - x_2)x_3 + \ldots + (1 - x_1)\ldots(1 - x_{n-1})x_n + (1 - x_1)\ldots(1 - x_n) = 1.$$
En déduire $\sum_{k=1}^{n} \frac{k.k!}{n^k}\binom{n}{k} = n$.