Correction du devoir surveillé 1

Exercice 1

1) (i) Le triangle de Pascal assure que pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, $\binom{j}{i}=\binom{j+1}{i+1}-\binom{j}{i+1}$. On a donc :

$$R_n=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{j+1}{i+1}-\binom{j}{i+1}.$$

Or, pour tout $i\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{j=i}^{n}\binom{j+1}{i+1}-\binom{j}{i+1}=\sum_{j=i}^{n}\binom{j+1}{i+1}-\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i+1}=\sum_{k=i+1}^{n+1}\binom{k}{i+1}-\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i+1}=\binom{n+1}{i+1}-\binom{i}{i+1}=\binom{n+1}{i+1}.$$

On en déduit que

$$R_n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n+1}{i+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}=\left[\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\right]-\binom{n+1}{0}=\boxed{2^{n+1}-1}.$$

(ii) On écrit :

$$R_n=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n}\binom{j}{i}=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}$$

Or, pour tout $j\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}=2^j.$$

Donc

$$R_n=\sum_{j=0}^{n}2^j=\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=\boxed{2^{n+1}-1}.$$

2) • Pour calculer S_n, on fait soit des paquets de deux termes consécutifs, soit on sépare les termes d'indices pairs et impairs. Optons pour la première méthode :

$$\boxed{S_n}=\sum_{\ell=1}^{n}\left[-(2\ell-1)^2+(2\ell)^2\right]=\sum_{\ell=1}^{n}(4\ell-1)=4\frac{n(n+1)}{2}-n=\boxed{n(2n+1)}.$$

• Pour calculer T_n, on procède par exemple comme suit :

$$\boxed{T_n}=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}i+\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}j=2\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}i=2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}i=2\sum_{i=1}^{n}i\sum_{j=1}^{n}1=2\sum_{i=1}^{n}in=2n\sum_{i=1}^{n}i=\boxed{n^2(n+1)}.$$

• Pour calculer U_n, on sépare les indices congrus à 1 et 2 modulo 3 pour écrire :

$$\boxed{U_n}=\sum_{j=1}^{n}(3j-2)^2+\sum_{j=1}^{n}(3j-1)^2=\sum_{j=1}^{n}\left(18j^2-18j+5\right)=3n(n+1)(2n+1)-9n(n+1)+5n=\boxed{n(6n^2-1)}.$$

3) Pour calculer cette somme, on peut procéder par récurrence. On peut aussi faire le calcul direct en permutant les deux sommes. Rédigeons les deux méthodes.

(i) Établissons le résultat par récurrence. Posons donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, H_n l'assertion

$$H_n : « \sum_{A\in\mathscr{P}([\![1,n]\!])}\sum_{k\in A}k=n(n+1)2^{n-2} ».$$

- Remarquons que

$$\sum_{A\in\mathscr{P}([\![1,1]\!])}\sum_{k\in A}k=\sum_{k\in\varnothing}k+\sum_{k\in\{1\}}k=0+1=1=1\times(1+1)\times2^{1-2}$$

donc H_1 est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que H_n est vraie. Remarquons que pour tout $A \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket)$, on a : ou bien $A \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, ou bien il existe un unique $B \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ tel que $A = \{n+1\} \cup B$. Ainsi
$$\sum_{A \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket)} \sum_{k \in A} k = \sum_{A \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} \sum_{k \in A} k + \sum_{B \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} \sum_{k \in \{n+1\} \cup B} k.$$
Or, d'une part, d'après H_n, on sait que
$$\sum_{A \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} \sum_{k \in A} k = n(n+1)2^{n-2}$$
et d'autre part,
$$\sum_{B \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} \sum_{k \in \{n+1\} \cup B} k = \sum_{B \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} \left[(n+1) + \sum_{k \in B} k \right] = (n+1) \sum_{B \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} 1 + \sum_{B \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} \sum_{k \in B} k$$
et donc toujours d'après H_n :
$$\sum_{B \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} \sum_{k \in \{n+1\} \cup B} k = (n+1)2^n + n(n+1)2^{n-2}.$$
Ainsi,
$$\sum_{A \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket)} \sum_{k \in A} k = n(n+1)2^{n-2} + (n+1)2^n + n(n+1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-1} + (n+1)2^n = (n+1)2^{n-1} \times (n+2).$$
D'où H_{n+1}.
- Le principe de récurrence assure que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \sum_{A \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} \sum_{k \in A} k = n(n+1)2^{n-2}}$.

(ii) Nous avons affaire à deux sommes, on va essayer de les permuter pour voir si le calcul est plus simple. On commence par poser $I = \{(A, k) \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket) \times \llbracket 1, n \rrbracket\,;\, k \in A\}$. On peut alors écrire :
$$\sum_{A \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} \sum_{k \in A} k = \sum_{(A,k) \in I} k.$$
En posant pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $I_k = \{A \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)\,;\, k \in A\}$, on a donc :
$$\sum_{A \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} \sum_{k \in A} k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{A \in I_k} k = \sum_{k=1}^{n} k \sum_{A \in I_k} 1 = \sum_{k=1}^{n} k \operatorname{card}(I_k).$$
Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Remarquons que l'application qui à $A \in I_k$ associe $A \setminus \{k\} \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k\})$ est bijective. On en déduit que $\operatorname{card}(I_k) = \operatorname{card}(\mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k\})) = 2^{n-1}$. Finalement, $\displaystyle\sum_{A \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} \sum_{k \in A} k = \sum_{k=1}^{n} k 2^{n-1} = 2^{n-1} \sum_{k=1}^{n} k = 2^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$, donc $\boxed{\sum_{A \in \mathscr{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)} \sum_{k \in A} k = n(n+1)2^{n-2}}$.

Exercice 2

1) Donnons trois méthodes.
<u>*Première méthode : résolution de l'équation par équivalences.*</u> Soit $\theta \in [0, \pi/2]$. Comme $\theta \in [0, \pi/2]$, on sait que $\cos(\theta) \geqslant 0$. Or, $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}}} \geqslant 0$. Puisque pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $a = b$ si et seulement si $a^2 = b^2$, on a donc :
$$\begin{aligned}
\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}}} \quad &\textbf{si et seulement si} \quad \cos^2\theta = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}}}^{\,2} \\
&\textbf{si et seulement si} \quad \cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}} \\
&\textbf{si et seulement si} \quad 2\cos^2\theta - 1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}} \\
&\textbf{si et seulement si} \quad \cos(2\theta) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}}.
\end{aligned}$$
Or, on a : pour tout $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $a = b$ si et seulement si $a^2 = b^2$ <u>**et** $a \geqslant 0$</u> (*montrez-le si vous n'êtes pas convaincu ; rappelons que pour prouver une équivalence, on démontre que les deux implications sont vraies*). D'où, comme $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}} \geqslant 0$, on a :

$$\cos(\theta)=\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}}}\quad \textbf{si et seulement si}\quad \cos^2(2\theta)=\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}\ \textbf{ et } \cos(2\theta)\geqslant 0$$

$$\textbf{si et seulement si}\quad \cos(4\theta)=\frac{\sqrt3}{2}\ \textbf{ et } \cos(2\theta)\geqslant 0$$

$$\textbf{si et seulement si}\quad \cos(4\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\ \textbf{ et } \cos(2\theta)\geqslant 0$$

$$\textbf{si et seulement si}\quad \left\{\begin{array}{l}4\theta=\frac{\pi}{6}\ [2\pi]\\ \cos(2\theta)\geqslant 0\end{array}\right.\ \text{ou}\ \left\{\begin{array}{l}4\theta=-\frac{\pi}{6}\ [2\pi]\\ \cos(2\theta)\geqslant 0\end{array}\right.$$

$$\textbf{si et seulement si}\quad \left\{\begin{array}{l}\theta=\frac{\pi}{24}\ [\pi/2]\\ \cos(2\theta)\geqslant 0\end{array}\right.\ \text{ou}\ \left\{\begin{array}{l}\theta=-\frac{\pi}{24}\ [\pi/2]\\ \cos(2\theta)\geqslant 0\end{array}\right.$$

$$\textbf{si et seulement si}\quad \left\{\begin{array}{l}\theta=\frac{\pi}{24}\ [\pi/2]\\ \cos(2\theta)\geqslant 0\end{array}\right.\ \text{ou}\ \left\{\begin{array}{l}\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{24}\ [\pi/2]\\ \cos(2\theta)\geqslant 0\end{array}\right.$$

$$\textbf{si et seulement si}\quad \left\{\begin{array}{l}\theta=\frac{\pi}{24}\ [\pi/2]\\ \cos(2\theta)\geqslant 0\end{array}\right.\ \text{ou}\ \left\{\begin{array}{l}\theta=\frac{11\pi}{24}\ [\pi/2]\\ \cos(2\theta)\geqslant 0.\end{array}\right.$$

Or, par hypothèse, $\theta\in[0,\pi/2]$. On a donc :

$$\cos(\theta)=\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}}}\quad \textbf{si et seulement si}\quad \left\{\begin{array}{l}\theta=\frac{\pi}{24}\\ \cos(2\theta)\geqslant 0\end{array}\right.\ \text{ou}\ \left\{\begin{array}{l}\theta=\frac{11\pi}{24}\\ \cos(2\theta)\geqslant 0\end{array}\right.$$

$$\textbf{si et seulement si}\quad \left\{\begin{array}{l}\theta=\frac{\pi}{24}\\ \cos(\pi/12)\geqslant 0\end{array}\right.\ \text{ou}\ \left\{\begin{array}{l}\theta=\frac{11\pi}{24}\\ \cos(11\pi/12)\geqslant 0.\end{array}\right.$$

Comme $\pi/12\in[0,\pi/2]$, on a $\cos(\pi/12)\geqslant 0$, et comme $11\pi/12\in\,]\pi/2,\pi]$, on a $\cos(11\pi/12)<0$. D'où

$$\cos(\theta)=\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}}}\quad \textbf{si et seulement si}\quad \theta=\frac{\pi}{24}.$$

Comme $\dfrac{\pi}{24}\in[0,\pi/2]$, on conclut que $\boxed{\text{pour tout } \theta\in[0,\pi/2],\ \cos(\theta)=\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}}}\ \text{ssi } \theta=\frac{\pi}{24}}$.

Deuxième méthode : résolution de l'équation par analyse-synthèse.

• *Analyse.* Soit $\theta\in[0,\pi/2]$ tel que $\cos(\theta)=\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}}}$. **Alors** $\cos^2\theta=\frac12+\frac12\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}}$. **Donc** $2\cos^2\theta-1=\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}}$. **D'où** $\cos(2\theta)=\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}}$. **Donc** $\cos^2(2\theta)=\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}$. **D'où** $\cos(4\theta)=\frac{\sqrt3}{2}$. **Donc** $\cos(4\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$. **Donc** $4\theta=\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $4\theta=-\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$. **Donc** $\theta=\frac{\pi}{24}\ [\pi/2]$ ou $\theta=-\frac{\pi}{24}\ [\pi/2]$. **Donc** $\theta=\frac{\pi}{24}\ [\pi/2]$ ou $\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{24}\ [\pi/2]$. **Donc** $\theta=\frac{\pi}{24}\ [\pi/2]$ ou $\theta=\frac{11\pi}{24}\ [\pi/2]$. Or, $\theta\in[0,\pi/2]$. **Donc** $\theta=\frac{\pi}{24}$ ou $\theta=\frac{11\pi}{24}$.

• *Synthèse.* Réciproquement :

◇ Si $\theta=\frac{\pi}{24}$. **Alors** $\cos(4\theta)=\cos(\pi/6)$ **donc** $2\cos^2(2\theta)-1=\sqrt{3/4}$. **D'où** $\cos^2(2\theta)=\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}$, **donc** $|\cos(2\theta)|=\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}}$. Or, $2\theta=\frac{\pi}{12}$, donc $\cos(2\theta)\geqslant 0$, **donc** $\cos(2\theta)=\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}}$. **Donc** $2\cos^2\theta-1=\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}}$. **D'où** $\cos^2\theta=\frac12+\frac12\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}}$ et $|\cos(\theta)|=\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}}}$. Or, $\theta=\frac{\pi}{24}$, donc $\cos(\theta)\geqslant 0$. Finalement, $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)=\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}}}$.

◇ Si $\theta=\frac{11\pi}{24}$. **Alors** $\cos(4\theta)=\cos(11\pi/6)$ **donc** $2\cos^2(2\theta)-1=\sqrt{3/4}$. **D'où** $\cos^2(2\theta)=\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}$, **donc** $|\cos(2\theta)|=\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}}$. Or, $2\theta=\frac{11\pi}{12}$, donc $\cos(2\theta)\leqslant 0$, **donc** $\cos(2\theta)=-\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}}$. **Donc** $2\cos^2\theta-1=-\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}}$. **D'où** $\cos^2\theta=\frac12-\frac12\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}}$ et $|\cos(\theta)|=\sqrt{\frac12-\frac12\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}}}$. Or, $\theta=\frac{11\pi}{24}$, donc $\cos(\theta)\geqslant 0$. Finalement, $\cos\left(\frac{11\pi}{24}\right)=\sqrt{\frac12-\frac12\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}}}$ et $\cos\left(\frac{11\pi}{24}\right)\neq\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac12+\frac12\sqrt{\frac34}}}$.

• *Conclusion.* Finalement, $\boxed{\text{pour tout } \theta \in [0,\pi/2],\ \cos(\theta) = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}}} \text{ si et seulement si } \theta = \frac{\pi}{24}}$.

Troisième méthode : utilisation du théorème de bijection. En majorant $3/4$ par 1, on remarque que $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}}}$ est un élément de $[0,1]$. Comme cos établit une bijection de $[0,\pi/2]$ sur $[0,1]$, ceci justifie qu'il existe un unique $\theta \in [0,\pi/2]$ tel que $\cos(\theta) = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}}}$.

Remarquons que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\frac{1+\cos\alpha}{2} = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Comme $\sqrt{\frac{3}{4}} = \cos\frac{\pi}{6}$, on en déduit que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} = \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$ puis $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}} = \left|\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right|$. Comme $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \geqslant 0$, on a : $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}} = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. On en déduit de même que $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}} = \cos^2\left(\frac{\pi}{24}\right)$ puis $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}}} = \left|\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)\right|$. Comme $\cos\left(\frac{\pi}{24}\right) \geqslant 0$, on obtient finalement $\boxed{\theta = \frac{\pi}{24}}$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\cos(x) \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin(x) \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,(\cos(x)\times\cos(\pi/4) + \sin(x)\times\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}\cos(x-\pi/4)$, de sorte que :

$$\begin{array}{rcl} \cos x + \sin x = 1 & \iff & \cos(x-\pi/4) = 1/\sqrt{2} \\ & \iff & \cos(x-\pi/4) = \cos(\pi/4) \\ & \iff & x-\pi/4 = \pi/4\,[2\pi] \text{ ou } x-\pi/4 = -\pi/4\,[2\pi] \\ & \iff & x = \pi/2\,[2\pi] \text{ ou } x = 0\,[2\pi]. \end{array}$$

Ainsi l'ensemble des valeurs cherchées est $\boxed{\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z}\right)\cup 2\pi\mathbb{Z}}$.

3) On commence par linéariser $\sin^2(\theta) = (1-\cos(2\theta))/2$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Puis on passe par les complexes pour se ramener à une suite géométrique. Supposons déjà que $x \notin \pi\mathbb{Z}$ afin que $e^{2ix} \neq 1$. Dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} (e^{2ix})^k\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{2i(n+1)x}}{1-e^{2ix}}\right) = \frac{\cos(nx)\sin((n+1)x)}{\sin x}$$

en utilisant l'angle de moitié, comme toujours. Ceci permet de calculer la somme cherchée lorsque $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Or si $x \in \pi\mathbb{Z}$, la somme est nulle puisque chaque terme que l'on somme est alors nul. D'où :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} - \frac{\cos(nx)\sin((n+1)x)}{2\sin x} & \text{si } x \notin \pi\mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \in \pi\mathbb{Z} \end{cases}}$$

4) On calcule :

$$\begin{array}{rcl} (\cos\alpha+\cos\beta+\mathrm{i}(\sin\alpha+\sin\beta))^n & = & \left(e^{\mathrm{i}\alpha}+e^{\mathrm{i}\beta}\right)^n \\ & = & \left(e^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)/2}\right)^n \left(e^{\mathrm{i}(\alpha-\beta)/2}+e^{\mathrm{i}(\beta-\alpha)/2}\right)^n \\ & = & e^{\mathrm{i}n(\alpha+\beta)/2}\left(2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^n. \end{array}$$

De même, $(\cos\alpha+\cos\beta-\mathrm{i}(\sin\alpha+\sin\beta))^n = e^{\mathrm{i}n(-\alpha-\beta)/2}\left(2\cos\frac{-\alpha+\beta}{2}\right)^n = 2^n\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^n e^{-\mathrm{i}n(\alpha+\beta)/2}$. D'où $(\cos\alpha+\cos\beta+\mathrm{i}(\sin\alpha+\sin\beta))^n + (\cos\alpha+\cos\beta-\mathrm{i}(\sin\alpha+\sin\beta))^n = 2^n\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^n\left(e^{\mathrm{i}n(\alpha+\beta)/2}+e^{-\mathrm{i}n(\alpha+\beta)/2}\right)$, *i.e.*

$$\boxed{(\cos\alpha+\cos\beta+\mathrm{i}(\sin\alpha+\sin\beta))^n + (\cos\alpha+\cos\beta-\mathrm{i}(\sin\alpha+\sin\beta))^n = 2^{n+1}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^n\cos\frac{n(\alpha+\beta)}{2}}.$$

5) Déterminons tout d'abord l'ensemble D de définition de l'équation. On vérifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x+\frac{4\pi}{5} = \frac{\pi}{2}\,[\pi]$ si et seulement si $x = -\frac{\pi}{10}\,[\pi/3]$ et $x-\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2}\,[\pi]$ si et seulement si $x = \frac{7\pi}{10}\,[\pi]$. On en déduit que $D = \mathbb{R}\backslash\left(\left(-\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{10}+\pi\mathbb{Z}\right)\right)$. Soit $x \in D$. x est solution de l'équation si et seulement si $3x+\frac{4\pi}{5} = x-\frac{\pi}{5}\,[\pi]$ si et seulement si $x = 0\,[\pi/2]$. Donc l'ensemble des solutions est $\left(\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)\cap D$. Or, on montre aisément que $\frac{\pi}{2}\mathbb{Z} \subset D$. Finalement, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions est } \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}$.

Exercice 3

1) • Supposons f surjective et montrons que h est injective. Soit $(A,B) \in \mathscr{P}(F)^2$ tel que $h(A) = h(B)$; on a $f^{-1}(A) = f^{-1}(B)$. Montrons que $A = B$. On procède par double inclusion.

$\boxed{\subset}$ Soit $y \in A$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors $f(x) \in A$, c'est-à-dire $x \in f^{-1}(A)$. Or, $f^{-1}(A) = f^{-1}(B)$. Donc $x \in f^{-1}(B)$, *i.e.* $f(x) \in B$, et donc $y \in B$. Ainsi, tout élément y de A appartient à B, ce qui montre que $A \subset B$.

$\boxed{\supset}$ On montre de même que $B \subset A$.

$\boxed{\textit{conclusion}}$ $A = B$.

Finalement, pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}(F)^2$ tel que $h(A) = h(B)$, on a $A = B$, donc h est injective.

• Supposons h injective et montrons que f est surjective. Soit $y \in F$. Montrons par l'absurde que y admet un antécédent par f. Supposons que y n'admet pas d'antécédent. Alors $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$. Or, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Donc $f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(\emptyset)$, *i.e.* $h(\{y\}) = h(\emptyset)$. Par injectivité de h, on en déduit que $\{y\} = \emptyset$, ce qui est absurde. Finalement, y admet un antécédent par f, et ce pour tout $y \in F$, donc f est surjective.

Remarque. On aurait aussi pu voir que $h(F) = E$ et $h(f(E)) = E$, donc $h(F) = h(f(E))$, donc si h est injective, on a en particulier $F = f(E)$, donc f est surjective.

• On conclut que $\boxed{f \text{ est surjective si et seulement si } h \text{ est injective}}$.

2) • Supposons f injective et montrons que g est injective. Soit donc $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tel que $g(A) = g(B)$; on a $f(A) = f(B)$. Montrons que $A = B$, ce qui conclura. On procède par double inclusion.

- ◇ Montrons que $A \subset B$. Soit $a \in A$. Alors $f(a) \in f(A)$, donc $f(a) \in f(B)$. Il existe donc $b \in B$ tel que $f(a) = f(b)$. Comme f est injective, $a = b$, et comme $b \in B$, on a finalement $a \in B$. On conclut que $A \subset B$.
- ◇ De même, $B \subset A$.
- ◇ On conclut que $A = B$.

Finalement, g est injective.

• Supposons g injective et montrons que f est injective. Soit $(a,b) \in E^2$ tel que $f(a) = f(b)$. Alors $f(\{a\}) = \{f(a)\} = \{f(b)\} = f(\{b\})$, donc $g(\{a\}) = g(\{b\})$, et par injectivité de g, $\{a\} = \{b\}$, d'où $a = b$. Finalement, f est injective.

• On conclut que $\boxed{f \text{ est injective si et seulement si } g \text{ est injective}}$.

3) • Supposons f surjective et montrons que g est surjective. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. Montrons que $B = g(f^{-1}(B))$, *i.e.* que $B = f(f^{-1}(B))$.

- ◇ Montrons que $B \subset f(f^{-1}(B))$. Soit $y \in B$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors comme $y \in B$, on a : $f(x) \in B$, donc $x \in f^{-1}(B)$. Donc $f(x) \in f(f^{-1}(B))$, *i.e.* $y \in f(f^{-1}(B))$. On conclut que $B \subset f(f^{-1}(B))$.
- ◇ Montrons que $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in f^{-1}(B)$, on sait que $f(x) \in B$. D'où $y \in B$. On conclut que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
- ◇ Finalement $B = f(f^{-1}(B))$, puis $B = g(f^{-1}(B))$, donc B admet un antécédent par g. Ceci étant vrai pour tout $B \in \mathscr{P}(E)$, on en déduit que g est surjective.

• Supposons g surjective et montrons que f est surjective. Soit $y \in F$. Alors $\{y\} \in \mathscr{P}(F)$, donc par surjectivité de g, il existe $A \in \mathscr{P}(E)$ tel que $g(A) = \{y\}$. D'où $f(A) = \{y\}$. Puisque $f(\emptyset) = \emptyset$ et $\{y\} \neq \emptyset$, on a : $A \neq \emptyset$. Il existe donc $x \in A$. On a : $f(x) \in f(A)$ donc $f(x) \in \{y\}$. D'où $f(x) = y$, et y admet un antécédent par f. Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on en déduit que f est surjective.

• On conclut que $\boxed{f \text{ est surjective si et seulement si } g \text{ est surjective}}$.