

Série d'exercices n° 1. Ensembles, dénombrement et dénombrabilité

Théorie des ensembles

Exercice 1.1. On possède un ensemble de lettres, un alphabet, que l'on note $A = \{a_1, \dots, a_m\}$.

- Comment interprète-t-on l'ensemble $A^n = A \times \dots \times A$ (n fois) ?
- Écrire l'ensemble des mots constitués de lettres de A à partir des ensembles A^n en utilisant les opérations usuelles sur les ensembles.

Exercice 1.2. Pour un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, on note E_Q l'ensemble des zéros de Q : $E_Q = \{x \in \mathbb{C}; Q(x) = 0\}$.

- Que vaut $\text{Card}(E_Q)$?
- Comment s'appelle l'ensemble $\mathcal{A} = \bigcup_{Q \in \mathbb{Z}[X]} E_Q$?
- L'union précédente est-elle disjointe ?

★ **Exercice 1.3.** On considère l'ensemble $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeur dans \mathbb{R} .

- Décrire avec des mots, sans utiliser *il existe* ni *pour tout*, les sous-ensembles de E suivants :
 $A = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \{u \in E; u_n \in \{0, 1\}\}$;
 $B = \bigcap_{M \in \mathbb{R}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} \{u \in E; u_m \geq M\}$;
 $C = \bigcup_{M \in \mathbb{R}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{u \in E; u_n \geq M\}$.
- Réciproquement, faire l'opération de traduction inverse pour les parties suivantes de E :
 F l'ensemble des suites stationnaires ;
 G l'ensemble des suites qui convergent.

★ **Exercice 1.4.** Soit A, B, C des parties d'un ensemble E . Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est la fonction indicatrice d'une partie de E , et si oui, préciser laquelle :

- a) $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$, b) $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$, c) $|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$, d) $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$, e) $\max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$, f) $\min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$.

★ **Exercice 1.5.** Soit A_1, A_2, \dots, A_n des parties d'un ensemble E .

- Montrer que

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbb{1}_{A_i}).$$

- En déduire que

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}} \mathbb{1}_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}.$$

Exercice 1.6. Soient E et F deux ensembles, et soit f une application de E dans F .

- Montrer que si A et B sont des sous-ensembles de E , alors

$$f[A \cup B] = f[A] \cup f[B] \quad \text{et} \quad f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B].$$

- Montrer que si f est injective, alors l'inclusion ci-dessus est une égalité.

- c) Montrer que si f n'est pas injective, alors il existe des ensembles $A \subset E$ et $B \subset E$ tels que $f[A \cap B] \neq f[A] \cap f[B]$.
- d) Peut-on comparer $(f[A])^c$ et $f[A^c]$? (Relativement à quel ensemble prend-on le complémentaire?)

★ **Exercice 1.7.** Soient E et F deux ensembles, et f une application de E dans F , et $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-ensembles de F

- a) Montrer que $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$ et que $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i)$.
- b) Montrer que $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.

Exercice 1.8. Soient X et Y deux ensembles. Des ensembles $\mathcal{P}(X \times Y)$ et $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$, y en a-t-il un qui est naturellement inclus dans l'autre?

Dénombrement

Exercice 1.9. Montrer la formule du triangle de Pascal : pour tous entiers positifs n et p , $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 1.10. Soient n et p des entiers positifs.

- a) Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}$.
- b) En déduire la valeur de $\sum_{i=0}^n \prod_{j=1}^p (i+j)$.

★ **Exercice 1.11.** Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$, $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Exercice 1.12. 12 chevaux sont au départ d'une course.

- a) Déterminer le nombre de trios possibles (sans ordre).
- b) Déterminer le nombre de tiercés possibles (avec ordre). (On suppose qu'il n'y a pas d'ex-æquo.)

Exercice 1.13. On tire simultanément (= sans remise, sans ordre) 5 cartes dans un jeu de 32 cartes. Déterminer le nombre de tirages donnant : a) 5 carreaux ou 5 piques ; b) au moins 1 roi ; c) au plus 1 roi ; d) 2 rois et 3 piques.

Exercice 1.14. Dans un sac de n billes numérotées de 1 à n on tire simultanément (= sans remise, sans ordre) k billes. Déterminer

- a) le nombre total de tirages ;
- b) le nombre de tirages contenant la bille 1 ;
- c) le nombre de tirages ne contenant pas la bille 1. (Que retrouve-t-on?)

★ **Exercice 1.15.** Soit un cube (en bois par exemple) dont on colore les faces en rouge, puis qu'on découpe en 27 petits cubes de même taille.

- a) Déterminer le nombre de tels petits cubes possédant : i) 0 face rouge ; ii) exactement 1 face rouge ; iii) exactement 2 faces rouges ; iv) exactement 3 faces rouges ; v) au moins 4 faces rouges.
- b) On tire avec remise 3 cubes dans un sac contenant ces 27 petits cubes. Déterminer le nombre de tirages donnant : i) exactement 3 cubes possédant exactement 2 faces rouges ; ii) exactement 2 cubes possédant exactement 2 faces rouges ; iii) exactement 1 cube possédant exactement 2 faces rouges ; iv) un nombre total de faces rouges égal à 4.

- ☺ **Exercice 1.16.** De combien de façons peut-on mettre n boules numérotées dans p urnes ? De combien de façons peut-on mettre n boules identiques dans p urnes ?

Dénombrabilité

- ★ **Exercice 1.17.** Déterminer si les ensembles suivants sont dénombrables ou non :
- a) L'ensemble \mathcal{P} des nombres premiers ;
 - b) L'ensemble des rationnels \mathbb{Q} ;
 - c) L'ensemble \mathcal{A} des nombres algébriques ;
 - d) L'ensemble des réels qui ne possèdent pas une écriture décimale unique (par exemple : $1 = 0,9999\dots$) ;
 - e) L'ensemble des mots constitués de lettres d'un alphabet fini A ;
 - f) L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de \mathbb{N} ; (Indication : on pourra raisonner par l'absurde et considérer l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} ; n \notin f(n)\}$, où $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ est une bijection)
 - g) L'ensemble $\mathcal{P}_{fin}(\mathbb{N})$ des parties finies de \mathbb{N} ;
 - h) L'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeur dans $\{0, 1\}$.
- ☺ **Exercice 1.18.** On considère l'ensemble $A \subset [0, 1]$ des réels compris entre 0 et 1 dont l'écriture décimale (après la virgule) ne comporte que des 1 et des 2.
- a) Montrer qu'il n'existe pas de bijection $f : \mathbb{N} \rightarrow A$. (Indication : raisonner par l'absurde et considérer $x = 0, a_1^{(1)} a_2^{(2)} a_3^{(3)} \dots$ où $a_i^{(n)}$ est la i^e décimale de $f(n)$.)
 - b) En déduire que l'ensemble des réels \mathbb{R} n'est pas dénombrable.
 - c) Donner une bijection entre $[0, 1]$ et l'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeur dans $\{0, 1\}$.