Université Pierre et Marie Curie 31 Mars 2009
Licence 3 - Probabilités - LM346 Groupe 1

Devoir Surveillé n°1

Les documents de cours et de TD sont interdits

Exercice I
1. Expliquer comment simuler une variable aléatoire par la méthode d'inversion.
2. Applications :
a. Expliquer en détails comment simuler la loi de Cauchy par cette méthode. On rappelle que la loi de Cauchy a pour densité :

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

b. Soit a et b deux réels tels que $1 < a < b$ et soit Y une loi de densité

$$g(y) \;=\; \frac{\ln y}{c}\, 1_{[a,b]}(y).$$

Donner la valeur de c en fonction de a et b. Expliquer comment simuler la variable Y par la méthode d'inversion.
Exercice II
a. Expliquer en détails comment approcher par la méthode de Monte Carlo l'intégrale suivante

$$I \;=\; \int_{[0,\pi]} \exp(1-\cos x)\, dx.$$

b. Donner une estimation du temps de calcul si on veut obtenir un résultat à 10^{-3} près avec une fiabilité de 99% (On pourra utiliser le fait que pour $q = 2,4 \quad \mathbb{P}\{-q \leq \mathcal{N}(0,1) \leq q\} = 0,99$)
Exercice III
Soit h une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, a et b deux réels tels que $a < b$ et g une fonction réelle sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x on ait $a < g(x) < b$. On engendre une suite (Y_n, U_n), $n = 1, 2, \cdots, n, \cdots$ de couples indépendants de variables aléatoires réelles, tels que pour tout $n \geq 1$, Y_n et U_n sont indépendantes. Les Y_n ont la même loi de densité h et les U_n suivent la loi uniforme sur $[a, b]$. Soit τ le premier instant où $U_n \leq g(Y_n)$, c'est à dire : $\tau = \inf\{n \geq 1 : U_n \leq g(Y_n)\}$ en posant $\tau = +\infty$ au cas où $U_n > g(Y_n)$, pour tout n.
a. Montrer que τ est une variable aléatoire.
b. Exprimer $\rho = P(U_n \leq g(Y_n))$ à l'aide de h et de g. Quelle est la loi de τ en fonction de ρ ?
c. Montrer que $P(\tau < +\infty) = 1$
d. On prend pour X la variable aléatoire $X = Y_\tau$, (i.e. $X = Y_n$ pour $\tau = n$). Montrer que X est une variable aléatoire.
e. Quelle est la loi de X ?
Exercice IV
Soit, pour $\alpha \in]0,1[$, $\mathbb{P}_\alpha$ la loi de Bernouilli de paramètre α.

1. Soit $\alpha \in]0,1[$. Soit $X_1, \ldots, X_n$ une famille de v.a.i.i.d. de loi $\mathbb{P}_\alpha$. Montrer, en utilisant l'inégalité de Chebichef, que pour tout $\eta > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \alpha\right| \geq \eta\right) \leq \frac{1}{4n\ \eta^2}.$$

2. Déduisez-en que pour $\theta \in]0,1[$, pour tout $n \geq 1$, en prenant $\eta > 0$ tel que $\theta = \frac{1}{4n\eta^2}$,

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \eta, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + \eta\right]$$

définit un intervalle de confiance de fiabilité au moins $100.(1-\theta)\%$ pour estimer α.

3. On considère un sondage dans lequel deux réponses sont possibles, “oui” et “non”. Combien faut-il interroger de personnes pour avoir une estimation à 0.001 près du pourcentage de gens en faveur de “oui”, et ce au moins 29 fois sur 30.