Sorbonne Universités
Licence - Mathématiques - 3LM246

Année 2017–2018
Processus et simulations

Correction de l'examen 3M246, Première Session

(1) Les classes d'états qui communiquent fermées : $\{1,3\}$, $\{2,6,7\}$; la classe non fermée $\{4,5\}$.

(2) Dans le notations de la Q3 : i est transient ssi $P(V_i < \infty \mid X_0 = i) = 1$; i est transient ssi $P(T^i < \infty \mid X_0 = i) < 1$; i est transient ssi $\sum_{n\geq 1} p_{ii}^{(n)}$ converge.
Les états transients de cette chaine de Markov sont 4 et 5.

(3) Les états $2,6,7$ forment une classe récurrente, donc : $P(T^2 = \infty \mid X_0 = 2) = 0$, $P(T^2 < \infty \mid X_0 = 7) = 1$, $P(V_2 < \infty \mid X_0 = 2) = 0$, $P(V_2 = \infty \mid X_0 = 6) = 1$.

(4) On pose $h_4^6 = P(T^6 < \infty \mid X_0 = 4)$, $h_5^6 = P(T^6 < \infty \mid X_0 = 5)$.
On a $h_4^6 = (1/7) + (3/7)h_4^6 + (1/7)h_5^6$, $h_5^6 = (1/6)h_4^6 + 1/6 + 1/3$, on déduit $h_4^6 = 9/23$, $h_5^6 = 13/23$.

(5) On a $P(T^2 < \infty \mid X_0 = 4) = P(T^6 < \infty \mid X_0 = 4) = 9/23$.
On a aussi $P(T^1 < \infty \mid X_0 = 4) = P(T^3 < \infty \mid X_0 = 4) = 1 - 9/23 = 14/23$. Comme $\{4,5\}$ est une classe finie transiente, ces états sont visités un nombre fini de fois et la CM abouttit à une des deux classes récurrentes où elle visite chaque état.

(6) L'unique mesure de proba invariante pour la classe $\{2,6,7\}$ est $(4/11, 3/11, 4/11)$, pour la classe $\{1,3\}$: $(6/11, 5/11)$.
Donc la famille $(c_1 6/11, c_2 4/11, c_1 5/11, 0, 0, c_2 3/11, c_2 4/11)$, $c_1, c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 = 1$.

(7) $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 6 \mid X_0 = i) = 3/11$ pour $i = 2,6,7$,
$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 6 \mid X_0 = 4) = 3/11 \times 9/23$
$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 6 \mid X_0 = 5) = 3/11 \times 13/23$
La classe $\{2,6,7\}$ est fermée, apériodique(!) car $p_{2,2} > 0$, on utilise le Thm de convergence vers la mesure invariante. Sinon $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 6 \mid X_0 = i) = 0$ pour $i = 1,3$.

(8) $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1 \mid X_0 = 4) = 6/11 \times (1 - 9/23)$
$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 2 \mid X_0 = 4) = 4/11 \times 9/23$
$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 3 \mid X_0 = 4) = 5/11 \times (1 - 9/23)$
$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 4 \mid X_0 = 4) = 0$
$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 5 \mid X_0 = 4) = 0$
$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 6 \mid X_0 = 4) = 3/11 \times 9/23$
$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 7 \mid X_0 = 4) = 4/11 \times 9/23$
On utilise le Thm de convergence vers la mesure invariante pour les classes apériodiques $\{2,6,7\}$ et $\{1,3\}$ et le fait que $4,5$ sont transients.

(9) On pose la mesure initiale $\mu = (1/2, 0, 1/2, 0, 0, 0, 0)$. Rien à faire, il faut calculer : $P(X_3 = 3) = (\mu P^3)_3$ Heureusement que les calculs se restreignent à la matrice 2×2 qui correspond à la classe $\{1,3\}$! On obtient 185/432.

Si $\nu = (18/44, 1/11, 15/44, 0, 0, 3/44, 1/11)$ la mesure initiale, on a tout de suite $P(X_3 = 3) = \nu_3 = 15/44$ car ν est une des mesures invariantes.

(10) Donner $E(T^i \mid X_0 = i)$ pour $i = 1,2,3,4,5,6,7$. Ce sont $11/6, 11/4, 11/5, \infty, \infty, 11/3, 11/4$ respectivement.

(11) **Partie (II) : Simulations de v.a.**
On a la réalisation d'une suite de v.a. indép. de loi uniforme sur $[0,1]$: $0.3, 0.12, 0.67, 0.666, 0.5$.
$S_n = \sum_{i=1}^{5} 1_{[0,2/3[}(U_i) = 4$.

(12) $C = \left(\int_R \exp(-3|x|dx)dx\right)^{-1} = (2/3)^{-1} = 3/2$.

(13) Pour $x < 0$: $F_X(x) = (1/2)\exp(3x)$, pour $x \geq 0$: $F_x(x) = 1 - (1/2)\exp(-3x)$.

(14) On simule U_1, U_2.. indép. de loi uniforme sur $[0,1]$, on calcule $F_X^{-1}(U_1), F_X^{-1}(U_2), \ldots$. On a ici $F_X^{-1}(U) = \big((1/3)\ln(2U)\big)1_{]0,1/2]}(U) + \big((-1/3)\ln(2(1-U))\big)1_{]1/2,1[}(U)$.

(15) C'est la loi exponentielle de paramètre 3. Pour argumenter, on peut utiliser la méthode de la fonction muette. On pourrait aussi remarque que pour tout $I =]a,b[\in \mathbf{R}_+$

$$P(|X| \in I) = P(X \in I) + P(X \in -I) = 3/2 \int_a^b \exp(-3x) + (3/2)\int_{-b}^{-a} \exp(3x)dx$$

$$= 3/2 \int_a^b \exp(-3x)dx + (3/2)\int_b^a \exp(-3t)(-dt) = 3\int_a^b \exp(-3x)dx.$$

(16) On simule une suite de v.a. $X_1, X_2, X_3, \ldots$ indép. de même loi que X et on obtient des valeurs $-0.7, 0.4, 0.8, -0.6, 0.1, \ldots$.
Par la Q15 les valeurs de v.a. de loi exp. indépendantes de paramètre 3 sont $|X_1|, |X_2|, \ldots$ donc $0.7, 0.4, 0.8, 0.6, 0.1$..
Alors $\max\{n \geq 1 : |X_1 + \cdots + |X_n| \leq t\}$ est de loi de Poisson de paramètre $3t$.
Pour la loi de Poisson de paramètre 1, on prend $t = 1/3$, comme $|X_1| = 0.7 > 1/3$, la v.a. de loi Poisson vaut 0.
Pour la loi de Poisson de paramètre 6, on prend $t = 2$, comme $|X_1| + |X_2| + |X_3| < 2$ et $|X_1| + |X_2| + |X_3| + |X_4| > 2$, la v.a. de loi de Poisson vaut 3.

(17) $P(|Z| < x) = F_Z(x) - F_Z(-x) = F_Z(x) - (1 - F_Z(x)) = 2F_Z(x) - 1$.
Si $2F_Z(x) - 1 = A$ alors $x = F_Z^{-1}(A/2 + 1/2)$.

(18) Pour le Thm de la Limite Centrale – voir le cours ou le partiel.
Par ce Thm : pour $\alpha = -1/2$ cette suite converge en loi vers la loi normale de paramètres $(0, \sigma^2)$.
Donc pour $\alpha < -1/2$ cette suite converge en loi vers 0.
Pour $\alpha > -1/2$ on peut juste dire que pour tout $C > 0$ arbitrairement grand $P(|n^\alpha(X_1 + \cdots + X_n)| > C) \to 1$ quand $n \to \infty$.

(19) Par le Théorème de la Limite Centrale et Q17.

$$P\Big(\Big|\frac{X_1 + \cdots X_n}{\sqrt{n\sigma^2}}\Big| < \Phi^{-1}(1/2 + 0.96/2)\Big) \to 0.96, \quad n \to \infty.$$

On a $\Phi^{-1}(1/2 + 0.96/2) = 2.06$.
Donc l'intervalle $\sigma^2 \in \Big[\frac{(X_1 + \cdots + X_n)^2}{n(2.06)^2}, \infty\Big[$.

(20) La suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge p.s. vers $EX_1^2 - (EX_1)^2 = VarX_1$ par la loi de Grands Nombres. On pourrait l'utiliser pour avoir la valeur approchée de la variance.