Université Pierre et Marie Curie 2012-2013
Probabilités et statistiques - LM345

Examen - 2nde Session.

Documents et calculatrices interdits

Dans tout l'examen on travaille sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

1. Questions de cours :

a) Donner un exemple d'une suite d'évènement A_n sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ mais

$$\mathbb{P}(A_n \text{ se produit infiniment souvent }) < 1.$$

A quelle condition sur les évènements A_n peut on conclure que

$$\mathbb{P}(A_n \text{ se produit infiniment souvent }) < 1$$

lorsque $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$?

b) Rappeler la définition de "les évènements $A \in \mathscr{F}$ et $B \in \mathscr{F}$ sont indépendants". Rappeler la définition de "Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes".

2. Deux variables discrètes : Soit X et Y deux variables indépendantes de loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (i.e. le résultat du jeté de deux dés).

a) Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$

b) Déterminer la loi de $X + Y$.

c) Soit $U = \min(X, Y)$ et $V = X - Y$.Calculer la loi de U

d) U et V sont elles indépendantes.

3. Allo ? : Un travailleur de call center passe n (un nombre fixé) d'appel téléphonique le premier jour. La probabilité qu'il parvienne à joindre un correspondant est p et on note X le nombre de correspondants joints le premier jour. Le lendemain il réessaye tous les correspondants non-joints le premier jour avec la même chance de réussite. On appel Y le nombre total de personnes jointes l'un ou l'autre jour.

a) Quelle est la loi de X ?

b) Calculer $\mathbb{P}(Y = h | X = k)$ pour $k \leq h \leq n$.

c) En déduire la loi de Y. Retrouver le résultat par un argument direct.

4. Convergence en loi : Soit $X_1, X_2, X_3, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi μ uniforme sur $[0, 1]$

a) Quelle est la densité de la loi μ ?

b) On pose $M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i$ et $Y_n = n(1 - M_n)$. Calculer la limite de $\mathbb{P}(Y_n \leq t)$ et en déduire que Y_n converge en loi vers une variable qu'on explicitera.

5. Borel Cantelli : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables indépendantes telles que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n^\alpha}$.

a) Montrer que $\mathbb{E}[|X_n|] \to 0$ quand $n \to \infty$ (autrement dit que $(X_n)_{n\geq 0}$ tends vers 0 dans L^1.

b) On suppose que $\alpha > 1$. Montrer qu'avec probabilité 1 la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est nulle à partir d'un certain rang.

c) On suppose que $\alpha \in [0, 1]$. Montrer qu'avec probabilité 1, $\text{Card}\{n : X_n = 1\} = \infty$.

6. Surbooking : Une compagnie aérienne fournit des réservations sur le vol d ?un appareil de 500 places. La probabilité qu ?un passager ayant effectué la réservation pour ce vol ne se présente pas est de 10%. Si la compagnie aérienne accorde 550 réservations sur ce vol, quel est le risque que certains passagers ne puissent pas prendre part dans l ?avion en raison du manque de place ?

x	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95
$\Phi(x)$	0.6915	0.7088	0.7527	0.7422	0.7580	0.7734	0.7881	0.8023	0.8159	0.8289

On rappel que $\Phi(x) = \mathbb{P}(Z < x)$ où Z suit une loi normale centrée réduite.

7. Pas de Cesaro pour la convergence en probabilité : Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de fonctions de répartition respectives

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{x+n} \text{ sinon} \end{cases}$$

a) Montrer que (X_n) converge vers 0 en probabilité.

b) On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $Y_n = \frac{S_n}{n}$. Montrer que Y_n ne converge pas vers 0 en probabilité.