**Contrôle continu 2**

Cours de probabilité LM345 - Durée : 1h15

Responsable du cours : M. Thieullen - Responsable du TD 2 : J. Berestycki

*Aucun document autorisé*

## Question de cours

Rappeler le théorème de convergence monotone (pour les variables aléatoires positives) et le théorème de convergence dominée (pour les variables aléatoires de signe quelquonque).

**Exercice 1** Le but de cet exercice est de démontrer l'inégalité de Minkowski : soit $X$ et $Y$ deux variables appartenant à $\mathcal{L}^2(\Omega, P)$.

1. rappelez l'inégalité de Cauchy-Shwartz en précisant le cas d'égalité.
2. Montrer que
$$E(|X+Y|^2)^{1/2} \leq E(|X|^2)^{1/2} + E(|Y|^2)^{1/2}$$
3. (en option) en déduire que $\mathcal{L}^2(\Omega, P)$ est un $R$-espace vectoriel.

Solution : Cauchy-Shwartz : $E(|XY|) \leq (E(X^2))^{1/2}(E(Y^2))^{1/2}$ avec égalité SSI $\exists a : Y = aX$. On a

$$\begin{aligned} E(|X+Y|^2) &= E(X^2) + E(Y^2) + 2E(|XY|) \\ &\leq E(X^2) + E(Y^2) + 2((E(X^2))^{1/2}(E(Y^2))^{1/2}) \\ &= ((E(X^2))^{1/2} + (E(Y^2))^{1/2})^2 \end{aligned}$$

et donc
$$E(|X+Y|^2)^{1/2} \leq E(|X|^2)^{1/2} + E(|Y|^2)^{1/2}.$$

Ceci implique que si $X \in \mathcal{L}^2$ et $Y \in \mathcal{L}^2$ alors $X + Y \in \mathcal{L}^2$.

**Exercice 2** Cet exercice porte sur les changements de variables.

1. Soit $X$ une variable de densité $f$ et de fonction de répartition $F$ (que l'on pourra supposer continue). Soit $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable et bijective. Quelle est la fonction de répartition de $Y = g(X)$ ? Quelle est la densité de $Y$ ?
2. (cette question peut être traitée soit en application de la question précédente soit indpendanment) La distribution du $\chi^2$ : soit $X$ une variable de densité $f$, calculer la fonction de répartition de $X^2$ et différentiez pour retrouver sa densité. Lorsque $X$ est une loi normale centrée réduite, $X^2$ suit la loi dite du Khi-2, donnez sa densité.
3. Donnez la densité de $\exp X$ où $X$ suite une loi normale centrée réduite (cette loi s'appelle la loi lognormale).

Solution 1): si $x \geq 0$ on a $F_{X^2}(x) := P(X^2 \leq x) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$ où $\Phi$ est la fonction de répartition de la loi normale. Donc

$$F'_{X^2}(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}(F'_X(\sqrt{x}) - F'_X(-\sqrt{x}) = (2\pi x)^{-1/2}e^{-x/2}.$$

Solution 2) Formule de changement de variable : si $X$ a une densité $f$ et $g$ est croissante et différentiable la variable $g(X)$ a pour densité $x \mapsto f(g^{-1}(x))/g'(g^{-1}(x))$. Donc $e^X$ a pour densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{(-(\ln(x))^2)/2}/x$

**Exercice 3**

Soit $Y$ une variable positive avec $EY^2 < \infty$ et soit $a < EY$. Montrer que

$$P(Y > a) \geq (EY - a)^2/EY^2.$$

(on pourra appliquer Cauchy-Shwartz à $Y1_{Y>a}$).
Solution : Cauchy-Shwartz donne $E(|Y1_{Y>a}|) \leq E(Y^2)^{1/2}P(Y > a)^{1/2}$ donc

$$P(Y > a) \geq E(|Y1_{Y>a}|)^2/E(Y^2)$$

Comme $Y$ est positive on a aussi

$$E(Y1_{Y>a}) = (E(Y) - E(Y1_{Y\leq a}) \geq (E(Y) - a)$$