**Examen final du 23 mai 2013 (1ère session)**

**Durée : 2 heures.** Tous documents interdits.

**Exercice 1.** Soient $\mu$ et $\nu$ deux mesures sur un espace mesurable $(E, \mathscr{A})$.

a) Rappeler ce que signifie : $\nu \ll \mu$.

b) Énoncer le théorème de Radon–Nikodym.

*Solution de l'exercice* 1.

a) $\nu \ll \mu$ signifie que $\nu$ est absolument continue par rapport à $\mu$, c'est-à-dire que pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\mu(A) = 0 \Longrightarrow \nu(A) = 0$.

b) Théorème 4.22 du cours. Si $\nu \ll \mu$ et que $\mu$ et $\nu$ sont $\sigma$-finies, alors il existe une fonction mesurable $f : (E, \mathscr{A}) \to (\bar{\mathbb{R}}_+, \mathscr{B}(\bar{\mathbb{R}}_+))$, unique à un ensemble $\mu$-négligeable près, telle que pour tout $A \in \mathscr{A}$,

$$\nu(A) = \int_E \mathbb{1}_A \, f \, d\mu.$$

**Exercice 2.** Soit $m$ la mesure de comptage sur $\mathbb{R}$.

a) Rappeler ce qu'est une mesure intérieurement régulière, extérieurement régulière.

b) i) Soit $A$ un borélien de $\mathbb{R}$ tel que $m(A) = +\infty$. Montrer qu'il existe une suite croissante $(K_n)$ de compacts inclus dans $A$ telle que $\lim_n m(K_n) = +\infty$.

ii) Traiter le cas plus facile où $m(A) < \infty$ afin de déduire que $m$ est intérieurement régulière.

c) Montrer que $m$ n'est pas extérieurement régulière.

*Solution de l'exercice* 2.

a) Une mesure $\mu$ sur un espace topologique $E$ muni de sa tribu borélienne $\mathscr{A}$ est :
- intérieurement régulière si pour tout $A \in \mathscr{A}$, il existe une suite $K_n$ de compacts inclus dans $A$ tels que $\lim_n \mu(K_n) = \mu(A)$ ;
- extérieurement régulière si pour tout $A \in \mathscr{A}$, il existe une suite $O_n$ d'ouverts contenant $A$ tels que $\lim_n \mu(O_n) = \mu(A)$ ;

b) i) Si $m(A) = \infty$, alors $A$ contient au moins une suite $(x_n)$ de points deux à deux distincts, et l'on peut prendre $K_n = \{x_0, \ldots, x_n\}$ (qui est fini donc compact).

ii) Si $m(A) < \infty$, alors $A$ est fini donc compact, et l'on peut prendre $K_n = A$ pour tout $n$.

c) Si $A$ est un singleton, alors tout ouvert $O$ le contenant est infini, donc $m(O) = \infty$, tandis que $m(A) = 1$.

**Exercice 3.** Soit $(E, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\mathscr{C}$ un $\pi$-système sur $E$ engendrant $\mathscr{A}$ (c'est-à-dire que $\mathscr{A} = \sigma(\mathscr{C})$).

a) Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mu)$ telle que $\int_E f\, d\mu = 0$.

   i) Rappeler la définition d'une classe monotone.

   ii) Montrer que
   $$\Lambda := \{A \in \mathscr{A} : \int_A f\, d\mu = 0\}$$
   est une classe monotone.

   iii) On suppose maintenant que pour tout $C \in \mathscr{C}$, $\int_C f\, d\mu = 0$. Montrer que $\Lambda = \mathscr{A}$.

   iv) En déduire que $f = 0$ $\mu-$p.p.

b) Montrer que si $f$ et $g$ sont deux éléments de $\mathscr{L}^1(\mu)$ tels que pour tout $C \in \mathscr{C}$,
$$\int_C f\, d\mu = \int_C g\, d\mu,$$
alors $f = g$ $\mu-$p.p.

*Solution de l'exercice* 3.

a) i) Une classe monotone est une classe de parties de $E$ qui contient $E$, qui est stable par différence propre et par réunion dénombrable croissante.

   ii) Par hypothèse, $E \in \Lambda$ puisque $\int_E f\, d\mu = 0$. Il suffit donc de montrer que $\Lambda$ est stable par différence propre et par réunion dénombrable croissante. Soient $A, B \in \Lambda$ tels que $A \subseteq B$. Alors comme $f \in L^1(\mu)$,
   $$\int_{B \setminus A} f\, d\mu = \int_B f\, d\mu - \int_A f\, d\mu = 0,$$
   donc $B \setminus A \in \Lambda$ et donc $\Lambda$ est stable par différence propre.
   Soit $(A_n)$ une suite croissante d'éléments de $\Lambda$ et $A := \lim_n \uparrow A_n$. Alors la suite de fonctions $(f\mathbb{1}_{A_n})$ converge vers $f\mathbb{1}_A$ et est dominée par $|\, f\,|$ qui est intégrable. Donc par le théorème de convergence dominée,
   $$\int_A f\, d\mu = \int_E f\mathbb{1}_A\, d\mu = \int_E \left(\lim_n f\mathbb{1}_{A_n}\right) d\mu = \lim_n \int_E f\mathbb{1}_{A_n}\, d\mu = 0.$$
   Par conséquent $A \in \Lambda$ et $\Lambda$ est donc stable par réunion dénombrable croissante.

   iii) D'après le théorème de la classe monotone, $\Lambda(\mathscr{C}) = \sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{A}$. Or $\mathscr{C} \subseteq \Lambda$, donc $\Lambda(\mathscr{C}) \subseteq \Lambda$, si bien que $\mathscr{A} \subseteq \Lambda$, autrement dit pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\int_A f\, d\mu = 0$.

   iv) L'argument à utiliser est standard. Si l'on prend $A := \{f > 0\}$, alors $f\mathbb{1}_A$ est une fonction positive d'intégrale nulle, et est donc nulle $\mu-$p.p. Le même argument appliqué à $B := \{f < 0\}$ implique que $f\mathbb{1}_B$ est nulle $\mu-$p.p. si bien que $f = f\mathbb{1}_A + f\mathbb{1}_B = 0$ $\mu-$p.p.

b) On applique la question précédente à la fonction $f - g$.

**Exercice 4.** Soit $(E, \mathscr{A})$ un espace mesurable et $\mu$ une mesure sur $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}or(\mathbb{R})$ telle que pour tout borélien $B$ borné, $\mu(E \times B) < \infty$. On suppose de plus que $\mu$ est invariante par les translations 'verticales', c'est-à-dire par les fonctions du type $(x, y) \mapsto (x, y + a)$.

Pour tout $A \in \mathscr{A}$, on définit la fonction

$$\begin{aligned} \mu_A : \mathscr{B}or(\mathbb{R}) &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \\ B &\longmapsto \mu(A \times B) \end{aligned}$$

a) Montrer que pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\mu_A$ est une mesure.
b) Montrer que $\mu_A$ est invariante par translation.
c) Soit $A \in \mathscr{A}$.
   i) Dire pourquoi $c_A := \mu_A([0,1])$ est toujours fini.
   ii) Lorsque $c_A = 0$, montrer que $\mu_A$ est la mesure nulle.
   iii) Lorsque $c_A \neq 0$, caractériser la mesure $c_A^{-1}\mu_A$.
   iv) En déduire qu'on a toujours $\mu_A = c_A\,\lambda$, où $\lambda$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
d) On définit

$$\begin{aligned} \nu : \mathscr{A} &\longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_+ \\ A &\longmapsto \mu(A \times [0,1]) \end{aligned}$$

   i) Montrer brièvement que $\nu$ est une mesure.
   ii) Montrer que pour tout $A \in \mathscr{A}$ et tout borélien $B$, $\mu(A \times B) = \nu(A)\,\lambda(B)$.
   iii) En déduire que $\mu$ est une mesure produit que l'on précisera.

*Solution de l'exercice* 4.

a) $\mu_A(\varnothing) = \mu(A \times \varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$ car $\mu$ est une mesure. De plus, si $(B_n)$ est une suite de boréliens deux à deux distincts, alors les pavés $A \times B_n$ sont deux à deux distincts et leur réunion est bien sûr $A \times \cup_n B_n$. Ainsi, comme $\mu$ est une mesure (troisième égalité ci-dessous)

$$\mu_A\left(\cup_n B_n\right) = \mu\left(A \times \cup_n B_n\right) = \mu\left(\cup_n (A \times B_n)\right) = \sum_n \mu(A \times B_n) = \sum_n \mu_A(B_n).$$

b) Par hypothèse, si $f$ est la fonction qui à $(x,y)$ associe $(x, y+a)$, alors pour tout borélien $B$, $\mu_A(B+a) = \mu(A \times (B+a)) = \mu(f(A \times B)) = \mu(A \times B) = \mu_A(B)$.
c) Soit $A \in \mathscr{A}$.
   i) $c_A = \mu(A \times [0,1]) \leq \mu(E \times [0,1]) < \infty$ par hypothèse.
   ii) Si $c_A = 0$ alors comme $\mu_A$ est invariante par translation,

$$\mu_A(\mathbb{R}) = \mu_A(\cup_{n\in\mathbb{Z}}([0,1]+n)) \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu_A([0,1]+n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu_A([0,1]) = 0.$$

   iii) Lorsque $c_A \neq 0$, $c_A^{-1}\mu_A$ est une mesure invariante par translation qui associe la valeur 1 à l'intervalle $[0,1]$, c'est donc la mesure de Lebesgue.
   iv) Si $c_A = 0$ alors $\mu_A = c_A\,\lambda$ car $\mu_A$ est alors la mesure nulle. Si $c_A \neq 0$, on vient de voir que $c_A^{-1}\mu_A = \lambda$, c'est-à-dire $\mu_A = c_A\,\lambda$, où $\lambda$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
d) i) $\nu$ est une mesure pour exactement les mêmes raisons que $\mu_A$ en est une !
   ii) Pour tout borélien $B$, pour tout $A \in \mathscr{A}$, $\mu(A \times B) = \mu_A(B) = c_A\,\lambda(B) = \nu(A)\lambda(B)$.
   iii) La mesure $\mu$ coïncide avec la mesure $\nu \otimes \lambda$ sur $\mathscr{A} \times \mathscr{B}or(\mathbb{R})$. Comme $\mathscr{A} \times \mathscr{B}or(\mathbb{R})$ est un $\pi-$système engendrant $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}or(\mathbb{R})$ et contenant une suite $(E_n)$ de limite $E \times \mathbb{R}$ telle que $\nu \otimes \lambda(E_n) < \infty$ (prendre par exemple $E_n = E \times [-n,n]$), le deuxième corollaire d'unicité de la mesure assure que $\mu = \nu \otimes \lambda$.