Examen partiel du 23 novembre 2017

Durée 2h. Sans document ni calculatrice ni portable.

Notations. L'ensemble Ω est muni d'une tribu $\mathcal{A}$ et d'une probabilité $\mathbb{P}$, dont l'espérance associée est notée $\mathbb{E}$. On rappelle que v.a. signifie 'variable aléatoire' et que $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A.

1. Des boules et des urnes. (5 points) On considère quatre urnes contenant des boules de couleurs différentes.

— L'urne A contient 3 boules rouges, 2 boules blanches, 3 boules noires ;

— L'urne B contient 4 boules rouges, 3 boules blanches, 1 boule noire ;

— L'urne C contient 2 boules rouges, 1 boule blanche, 1 boule noire ;

— L'urne D contient 1 boule rouge, 6 boules blanches, 2 boules noires.

On choisit au hasard une urne et de celle-ci on tire une boule au hasard.

a) Calculer la probabilité que cette boule ne soit pas blanche.

b) Si la boule est rouge, quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée de l'urne C ?

c) Maintenant, on tire (sans remise) 3 boules au hasard dans l'urne A. On note X le nombre de boules rouges que l'on a tirées. Caractériser la loi de X.

Solution de l'exercice 1. On utilise la notation $P_B(A) = P(A \mid B)$.

a) Notons B l'événement « la boule tirée est blanche », R « la boule tirée est rouge », N « la boule tirée est noire »et U_i « l'urne choisie est l'urne i ». Comme (U_1, U_2, U_3, U_4) est un système complet d'événements, on obtient, par la formule des probabilités totales,

$$P(\overline{B}) = P_{U_1}(\overline{B})P(U_1) + P_{U_2}(\overline{B})P(U_2) + P_{U_3}(\overline{B})P(U_3) + P_{U_4}(\overline{B})P(U_4)$$

On a, étant donné le contenu des différentes urnes, $P_{U_1}(\overline{B}) = \frac{6}{8}$,$P_{U_2}(\overline{B}) = \frac{5}{8}$, $P_{U_3}(\overline{B}) = \frac{3}{4}$ et $P_{U_4}(\overline{B}) = \frac{1}{3}$.

Comme l'urne est choisie au hasard, par équiprobabilité, $P(U_i) = \frac{1}{4}$, donc $P(\overline{B}) = \frac{59}{96}$.

b) La formule de Bayes, avec le système d'événements (U_1, U_2, U_3, U_4), donne

$$P_R(U_3) = \frac{P_{U_3}(R)P(U_3)}{\sum_{i=1}^4 P_{U_i}(R)P(U_i)} = \frac{36}{107}$$

2. Minimum et maximum de deux v.a. exponentielles. (8 points) Soient X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$.

a) Rappeler la densité de la loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$, et donner sa fonction de répartition F. Calculer $\mathbb{E}[X_1]$.

b) On note $U = \max(X_1, X_2)$, et F_U sa fonction de répartition. Montrer que $F_U(t) = F(t)^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La v.a. U possède-t-elle une densité ? Si oui, la donner.

c) On note $V = \min(X_1, X_2)$, et F_V sa fonction de répartition. Montrer que $F_V(t) = 1 - (1 - F(t))^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. La v.a. V possède-t-elle une densité ? Si oui, la donner.

d) Calculer $\mathbb{E}[V]$ et $\mathbb{E}[U]$. Exprimer $|X_1 - X_2|$ en fonction de U et V et en déduire la valeur de $\mathbb{E}\big[|X_1 - X_2|\big]$.

Solution de l'exercice 2.

a) La densité de la loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$ est $\theta e^{-\theta x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. Sa fonction de répartition $F(t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t)$ vaut 0 si $t \leq 0$, et pour $t > 0$

$$F(t) = \int_0^t \theta e^{-\theta x} dx = 1 - e^{-\theta t}\,.$$

Pour calculer l'espérance, on a

$$\mathbb{E}[X_1] = \int_0^\infty x\theta e^{-\theta x} dx \overset{(IPP)}{=} \big[-xe^{-\theta x}\big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\theta x} dx = 0 + \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta}\,.$$

b) On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\max(X_1, X_2) \leq t$ si et seulement si $X_1 \leq t$ et $X_2 \leq t$. Ainsi, en utilisant l'indépendance de X_1 et X_2,

$$\begin{aligned} F_U(t) &= \mathbb{P}(U \leq t) = \mathbb{P}\big(\{X_1 \leq t\} \cap \{X_2 \leq t\}\big) = \mathbb{P}(X_1 \leq t)\mathbb{P}(X_2 \leq t) \\ &= F(t)^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0\,, \\ (1 - e^{-\theta t})^2 & \text{si } t > 0\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction de répartition de U est continue (notamment en 0), et dérivable par morceaux, donc U admet une densité, qui est la dérivée de F_U, c'est-à-dire

$$f_U(x) = 2\theta e^{-\theta x}(1 - e^{-\theta x})\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\,.$$

c) On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\min(X_1, X_2) \leq t$ si et seulement si $X_1 \leq t$ ou $X_2 \leq t$. Ainsi, en utilisant l'indépendance de X_1 et X_2,

$$\begin{aligned} F_V(t) &= \mathbb{P}(V \leq t) = \mathbb{P}\big(\{X_1 \leq t\} \cup \{X_2 \leq t\}\big) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq t) + \mathbb{P}(X_2 \leq t) - \mathbb{P}\big(\{X_1 \leq t\} \cap \{X_2 \leq t\}\big) \\ &= 2F(t) - F(t)^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0\,, \\ 1 - e^{-2\theta t} & \text{si } t > 0\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction de répartition de V est continue (notamment en 0), et dérivable par morceaux, donc V admet une densité, qui est la dérivée de F_V, c'est-à-dire

$$f_V(x) = 2\theta e^{-2\theta x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\,.$$

d) V est une variable exponentielle de paramètre 2θ, on a donc $\mathbb{E}[V] = \frac{1}{2\theta}$ (cf. question a)). Pour U, on écrit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U] &= \int_0^\infty 2\theta x e^{-\theta x}(1 - e^{-\theta x})dx \\ &= 2\int_0^\infty \theta x e^{-\theta x}dx - \int_0^\infty 2\theta x e^{-\theta x}dx = \frac{2}{\theta} - \frac{1}{2\theta} = \frac{3}{2\theta}.\end{aligned}$$

On a utilisé que $\int_0^\infty \theta x e^{-\theta x}dx$ est l'espérance d'une v.a. exponentielle de paramètre θ et vaut donc $1/\theta$, et que $\int_0^\infty 2\theta x e^{-\theta x}dx$ est l'espérance d'une v.a. exponentielle de paramètre 2θ et vaut donc $1/(2\theta)$.
On remarque que $|X_1 - X_2| = U - V$, donc par linéarité de l'espérance $\mathbb{E}\big[|X_1 - X_2|\big] = \mathbb{E}[U] - \mathbb{E}[V] = \frac{1}{\theta}$.

3. Somme de variables indépendantes. On considère une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, indépendantes, et suivant toutes la loi uniforme sur $[-1, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Partie 1. (7 points)

a) Rappeler la densité de la loi de X_1. Justifier l'existence de $\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathrm{Var}(X_1)$, et les calculer.

b) Calculer $\mathbb{E}[\frac{1}{n}S_n]$ et $\mathrm{Var}(\frac{1}{n}S_n)$.

c) Soit $a > 0$. Montrer que

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n}\Big| \geq a\Big) \leq \frac{1}{3a^2n}. \qquad (\star)$$

d) En déduire la loi faible des grands nombres : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}[X_1]\Big| > \varepsilon\Big) \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Partie 2. (5 points *bonus*) Soit $\lambda > 0$.

a) En utilisant l'inégalité de Markov, montrer que pour tout $t \geq 0$

$$\mathbb{P}(S_n \geq t) \leq e^{-\lambda t}\mathbb{E}\big[e^{\lambda S_n}\big]\,.$$

b) Montrer que $e^{\lambda X_1}$ est une variable aléatoire intégrable, et calculer $\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}]$. On admettra que $\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}] \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}}$ pour tout $\lambda > 0$.

c) Calculer $\mathbb{E}[e^{\lambda S_n}]$ en fonction de $\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}]$. En déduire que pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(S_n \geq t) \leq e^{\frac{n\lambda^2}{2} - \lambda t}.$$

d) Montrer que pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(S_n \geq t) \leq e^{-\frac{t^2}{2n}}$. Indication : trouver la valeur de λ pour laquelle $\frac{n\lambda^2}{2} - \lambda t$ est minimal.

e) Montrer que pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq a\right) \leq 2e^{-\frac{a^2 n}{2}}$, et comparer avec le résultat $(\star)$.

Solution de l'exercice 3.

a) La v.a. X_1 admet pour densité

$$f_{X_1}(x) = \frac{1}{2}\ \mathbb{1}_{[-1,1]}(x).$$

C'est une v.a. bornée donc elle est intégrable, de même que X_1^2. Cela justifie l'existence de $\mathbb{E}[X_1]$ et $\mathrm{Var}(X_1)$. On peut les calculer en utilisant la densité :

$$\mathbb{E}[X_1] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X_1}(x) dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x\, dx = 0$$

car la fonction intégrée entre -1 et 1 est impaire. De même,

$$\mathbb{E}[X_1^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{X_1}(x) dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}$$

d'où $\mathrm{Var}(X_1) = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]^2 = \frac{1}{3}$.

b) Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}[S_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = 0.$$

Pour la variance, les v.a. $X_1, \ldots, X_n$ étant indépendantes, on utilise la propriété qui affirme que la variance d'une somme de v.a. indépendantes (de carré intégrable) est la somme des variances, d'où

$$\mathrm{Var}(S_n) = \frac{n}{3}.$$

On en déduit que $\mathbb{E}[\frac{1}{n} S_n] = 0$ et $\mathrm{Var}(\frac{1}{n} S_n) = \frac{1}{3n}$

c) La v.a. S_n/n admettant une variance (égale à $\frac{1}{3n}$), on peut lui appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq a\right) = \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq a\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(S_n/n)}{a^2} = \frac{1}{3a^2 n}.$$

On en déduit immédiatement l'inégalité demandée.

d) Il suffit de se rappeler que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et d'appliquer la question précédente.