Sorbonne Université
Année 2017-2018

Master M1 "Mathématiques et Applications"
Calcul et contrôle stochastique

Examen final 1ère session du 4 Mai 2018. Durée 3h00

Documents interdits.

Question de Cours

Montrer que si un marché (S, B) à temps discret est viable et complet alors il y a unicité de la mesure risque neutre.

Un marché simple

On considère un marché (S, B) sur trois dates $n \in \{0, 1, 2\}$ modélisé par un univers à quatre éléments $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ tel que $\forall n \in \{0, 1, 2\}$, $B_n = 1$ et S a la dynamique des prix (en euro) suivante

$$S_0 = 10, \quad ((S_1, S_2)(\omega_i))_{i=1,\dots,4} = ((20, 60), (20, 0), (5, 8), (5, 2)).$$

On note $\mathcal{F}_n = \sigma(S_k, 0 \leq k \leq n)$.

1. Réaliser un graphe décrivant la dynamique de S. Donner $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.
2. Le marché est-il viable ? Est-il complet ? Justifier.
3. Calculer le prix C_0 à $n = 0$ et C_1 à $n = 1$ d'un call européen sur S de prix d'exercice 51 (i.e $C_2 = (S_2 - 51)_+$).
4. Vous disposez de 10€ à $n = 0$. Vous pouvez dépenser ces 10€ soit en achetant une action S ou bien $10/C_0$ call européen. Que faites vous ?

Corrigé:

1. Graphe binaire. $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1) = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}\}$, $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$.
2. Soit $\mathbb{P}$ une mesure sur Ω. On note $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$. S_n est une $\mathbb{P}$-martingale ssi $\mathbb{E}[S_1] = S_0$ et $\mathbb{E}[S_2|\mathcal{F}_1] = S_1$. Ceci est équivalent au système d'équation suivant

   $$20(p_1 + p_2) + 5(p_3 + p_4) = 10, 60p_1/(p_1 + p_2) + 0p_2/(p_1 + p_2) = 20, 8p_3/(p_3 + p_4) + 2p_4/(p_3 + p_4) = 5.$$

   On résout (en utilisant que $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$) et on trouve une unique solution: $p_1 = 1/9, p_2 = 2/9, p_3 = 1/3, p_4 = 1/3$. Il existe donc une unique proba risque neutre: le marché est viable et complet.
3. On calcule avec la proba risque neutre. $C_0 = \mathbb{E}[(S_2 - 51)^+] = 1$, $C_1 = \mathbb{E}[(S_2 - 51)^+|\mathcal{F}_1] = 3\mathbf{1}_{\{S_1=20\}}$.
4. Avec les 10€ dans le cas d'avolution favorable du marché ω_1 on obtient à n=2: 60€ si on décide d'acheter S ou bien si on achète des call: $(10/C_0) \times C_2(\omega_1) = 90$€. Ainsi, si on pari sur une croissance de S, il vaut mieux acheter des call (effet levier).

Bessel et martingales locales

On considère $n \geq 3$ mouvements Browniens indépendants $(W_1(t), \dots, W_n(t))_{t\geq 0}$. Soit $R_t := (1 + W_1(t))^2 + (W_2(t))^2 \cdots + (W_n(t))^2$. On note $\tau := \inf\{t \geq 0;\ R_t = 0\}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*$ on note $\tau_k := \inf\{t \geq 0;\ R_t \leq 1/k\}$.

1. Montrer que R_t est un processus d'Itô et qu'il existe une martingale N_t telle que $R_t = N_t + nt$.

2. Montrer que $\langle N\rangle_t = \langle R\rangle_t = 4\int_0^t R_s ds$.

3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on définit $M_t^{(k)} := (1/R_{t\wedge\tau_k})^{n/2-1}$, $t \geq 0$. Montrer, en utilisant Itô pour $t \leq \tau_k$, que $(M_t^{(k)})_{t\geq 0}$ est une martingale locale. Établir ensuite que c'est une martingale.

4. En utilisant le lemme de Fatou montrer que $\forall t \geq 0$, $\mathbb{E}[(1/R_{t\wedge\tau})^{n/2-1}] \leq 1$ et en déduire que $\mathbb{P}[\tau < +\infty] = 0$ (utiliser Fatou une deuxième fois).

On définit alors le processus $M_t := (1/R_t)^{n/2-1}$ qui, puisque $\tau = +\infty$ p.s, est donc bien défini pour tout $t \geq 0$.

5. Montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale.

6. Montrer que pour $t > 0$, $\mathbb{E}[M_t] = \frac{1}{t^{n/2-1}}\mathbb{E}[1/((1/\sqrt{t} + X_1)^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2)^{(n/2-1)}]$ où $(X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien centré et de matrice de covariance l'identité.

7. En déduire que $\mathbb{E}[M_t] \to 0$ lorsque $t \to +\infty$.

8. $(M_t)_{t\geq 0}$ est-elle une martingale ?

Corrigé:

1. $R_t = f(W_1(t), \ldots, W_n(t))$ où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (1+x_1)^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ est une fonction de classe C^2 et $(W_1(t), \ldots, W_n(t))$ est un processus d'Itô dans $\mathbb{R}^n$. Donc par la formule d'Itô multidimensionnelle, R_t est également un processus d'Itô. De plus, sans appliquer directement (on pourrait le faire) la formule d'Itô multi-dimentionnelle, on peut écrire $R_t = N_t + nt$ où $N_t = 1 + 2W_1(t) + (W_1(t)^2 - t) + \cdots + (W_n(t)^2 - t)$ qui d'après le cours est une martingale (comme somme de martingales).

2. Et puisque par Itô $W_i(t)^2 - t = 2\int_0^t W_i(s)dW_i(s)$ on obtient que $dN_t = 2(1+W_1(t))dW_1(t) + 2W_2(t)dW_2(t) + \cdots + 2W_n(t)dW_n(t)$, et par indépendance des $W_i(t)$ et par définition du crochet, $d\langle R\rangle_t = d\langle N\rangle_t = 4(1 + W_1(t))^2dt + 4(W_2(t))^2dt + \cdots + 4(W_n(t))^2dt$ et donc $\langle N\rangle_t = \langle R\rangle_t = 4\int_0^t R_s ds$.

3. Pour $t \leq \tau_k$ on a que $R_t \geq 1/k$ et donc puisque la fonction $x \mapsto 1/x^{n/2-1}$ est C^2 sur $[1/k, +\infty[$ on obtient, par la formule d'Itô appliqué au processus d'Itô R_t:

$$\begin{aligned}
M_t^k &= 1 + (1-n/2)\int_0^t 1/(R_s)^{n/2}dR_s + \frac{n(n/2-1)}{4}\int_0^t 1/(R_s)^{n/2+1}d\langle R\,\rangle_s = 1 + (1-n/2)\int_0^t 1/(R_s)^{n/2}dN_s \\
&= 1 + (1-n/2)\left(\int_0^t 2(1+W_1(s))/(R_s)^{n/2}dW_1(S) + \int_0^t 2W_2(s)/(R_s)^{n/2}dW_2(s) + \right. \\
&\qquad \left. \cdots + \int_0^t 2W_n(s)/(R_s)^{n/2}dW_n(s)\right).
\end{aligned}$$

c'est ainsi une somme de martingales locale et c'est donc une martingale locale. Par ailleurs on a que pour tout t, $0 \leq M_t^k \leq k^{n/2-1}$ donc elle est bornée. C'est donc une vraie martingale.

4. Par Fatou on a $\mathbb{E}[\liminf_k 1/(R_{t\wedge\tau_k})^{n/2-1}] \leq \liminf_k \mathbb{E}[1/(R_{t\wedge\tau_k})^{n-1}] = \liminf_k \mathbb{E}[M_t^k] = \liminf_k \mathbb{E}[M_0^k] = 1$. Or puisque $\tau_k \to \tau$ on a $\liminf_k 1/(R_{t\wedge\tau_k})^{n/2-1} = 1/(R_{t\wedge\tau})^{n/2-1}$ et donc pour tout $t \geq 0$ on a $\mathbb{E}[1/(R_{t\wedge\tau})^{n/2-1}] \leq 1$. Par Fatou une deuxième fois, $\mathbb{E}[\liminf_k 1/(R_{k\wedge\tau})^{n/2-1}] \leq \liminf_k \mathbb{E}[1/(R_{k\wedge\tau})^{n/2-1}] \leq 1$. Puisque $R_\tau = 0$ on a que la v.a positive $\liminf_k 1/(R_{k\wedge\tau})^{n/2-1}$ vaut $+\infty$ sur l'événement $\{\tau < +\infty\}$. Donc pour qu'elle soit d'espérance finie cela implique nécessairement que $\mathbb{P}[\tau < +\infty] = 0$.

5. C'est la même formule d'Itô qui s'applique ici. Elle est licite car $x \mapsto 1/x^{n/2-1}$ est C^2 sur $]0, +\infty[$.

6. Cela résulte du fait qu'en loi $(W_1(t), \ldots, W_n(t)) \stackrel{loi}{=} \sqrt{t}(X_1, \ldots, X_n)$.

7. Par convergence monotone, $\mathbb{E}[1/((1/\sqrt{t} + X_1)^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2)^{(n/2-1)}]$ converge lorsque $t \to +\infty$ vers $\mathbb{E}[1/(X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2)^{(n/2-1)}] = 1/(2\pi)^{n/4-1/2}\int_{\mathbb{R}^n} 1/|x|^{(n-2)}e^{-|x|^2/2}dx = C\int_0^{+\infty} re^{-r^2}dr < +\infty$ (en passant en coordonnées polaires: $dx = r^{n-1}drd\theta$, C est une constante).

8. Si $(M_t)_{t\geq 0}$ était une vraie martingale alors on aurait que $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0] = 1$ ce qui est faux par la question précédant.

Problème: Les prix des américaines.

On considère un marché (S, B) que l'on suppose viable et complet défini sur un univers Ω fini et où $\mathbb{P}$ est l'unique probabilité risque neutre. On note N l'échéance du marché, $\mathcal{F} := (\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$ la filtration engendrée par l'actif risqué $(S_n)_{0\leq n\leq N}$. On suppose que $B_0 = 1$, $S_0 = s_0 \in \mathbb{R}$ et donc $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. On considère $(Z_n)_{0\leq n\leq N}$ un processus $\mathcal{F}$-adapté, on note $\tilde{S}_n := S_n/B_n$ et $\tilde{Z}_n := Z_n/B_n$ les prix réactualisés et enfin on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des portefeuilles auto-financés.

On considère un contrat *américain* associé à ce processus qui donne le droit à son détenteur de choisir une date τ (non anticipative) à laquelle l'exercer et de recevoir à cette date la somme Z_τ. Par exemple, dans le cas d'une option d'achat (resp. de vente) américaine sur le sous-jacent S et de prix d'exercice K, on prendra donc $Z_n := (S_n - K)_+$ (resp. $Z_n := (K - S_n)_+$).

Partie 1: Le prix de sur-réplication.

Le vendeur de ce contrat ne connaît pas a priori la date d'exercice τ à laquelle il devra donc fournir au détenteur la somme Z_τ. On définit alors $\bar{\pi}$ le *prix de sur-réplication* du contrat qui par définition est la plus petite des valeurs initiales d'un portefeuille qui recouvre Z en tout temps. Ainsi, en notant $V_n(x, \alpha, \beta)$ la valeur au temps n d'un portefeuille auto-financé $(\alpha_n, \beta_n)_{0\leq n\leq N}$ et de valeur initiale x, on a par définition

$$\bar{\pi} := \inf\{x \in \mathbb{R};\ \exists(\alpha, \beta) \in \mathcal{P},\ \forall n \in \{0, \dots, N\},\ V_n(x, \alpha, \beta) \geq Z_n\}.$$

1. Vérifier que

$$\bar{\pi} = \inf\{x \in \mathbb{R};\ \exists(\alpha)_{0\leq n\leq N}\ \mathcal{F}-\text{previsible},\ \forall n \in \{0, \dots, N\},\ x + (\alpha \star \tilde{S})_n \geq \tilde{Z}_n\}.$$

2. En déduire que $\bar{\pi} \geq \sup_{\tau,\text{t.a}\leq N} \mathbb{E}[\tilde{Z}_\tau]$..

On note $(U_n)_{0\leq n\leq N}$ l'enveloppe de Snell de $(\tilde{Z}_n)_{0\leq n\leq N}$.

3. Montrer qu'il existe une $\mathcal{F}$-martingale $(M_n)_{0\leq n\leq N}$ et un processus positif croissant prévisible $(A_n)_{0\leq n\leq N}$ nul en 0 tels que $U_n = M_n - A_n$ pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$.

4. En utilisant un résultat du cours, expliquer pourquoi il existe un processus α prévisible tel que $M_n = U_0 + (\alpha \star \tilde{S})_n$.

5. Déduire des questions précédentes que $U_0 \geq \bar{\pi}$ et donc que

$$\bar{\pi} = \sup_{\tau,\text{t.a}\leq N} \mathbb{E}[\tilde{Z}_\tau].$$

Partie 2: Le prix de sous-réplication.

Du point de vu de l'acheteur du contrat américain, le prix du contrat est la valeur maximale x pour laquelle il peut s'endetter à $n = 0$ et telle qu'il puisse trouver un portefeuille auto-financé (α, β) et une date d'exercice τ (un temps d'arrêt qu'il choisit lui) tels que $V_\tau(-x, \alpha, \beta) + Z_\tau \geq 0$ (c'est à dire tels que le montant Z_τ qu'il percevra en τ le rendra solvable en liquidant son portefeuille). On définit ainsi le prix de sous-réplication

$$\underline{\pi} := \sup\{x \in \mathbb{R};\ \exists(\alpha, \beta) \in \mathcal{P}, \exists\tau \text{ t.a},\ V_\tau(-x, \alpha, \beta) \geq -Z_\tau\}.$$

6. Montrer que $\underline{\pi} \leq U_0$.

7. Montrer qu'il existe un temps d'arrêt τ_{opt} tel que $M_{\tau_{\text{opt}}} = U_{\tau_{\text{opt}}} = \tilde{Z}_{\tau_{\text{opt}}}$. Où M est la martingale introduite à la question 4).

8. En déduire, à l'aide également de la question 5), que $\underline{\pi} \geq U_0$.

Corrigé:

1. Par autofinancement on a d'après le cours, $\tilde{V}_n(x,\alpha,\beta) = x + (\alpha \star \tilde{S})_n$. D'où l'égalité voulue en réactualisant dans la définition de $\bar{\pi}$.

2. Par la question précédante, en prenant l'inf sur les x tels qu'il existe $(\alpha) \in \mathcal{P}$ tel que $\forall n \in \{0,\dots,N\},\ x + (\alpha \star \tilde{S})_n \geq \tilde{Z}_n$ on obtient que $\forall \tau$ t.a $\leq N$; $\bar{\pi} \ \geq \mathbb{E}[\tilde{Z}_\tau]$. Puis en prenant le sup sur les τ, puisque d'après le cours $U_0 = \sup_\tau \mathbb{E}[\tilde{Z}_\tau]$, on obtient $\bar{\pi} \geq U_0$.

3. On pose $A_n := -\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\Delta U_k | \mathcal{F}_{k-1}]$ ($A_0 = 0$ et A_n est prévisible par déf) et $M_n = U_n + A_n$. Puisque U_n est une sur-martingale, A_n est croissant. De plus $\Delta M_n = \Delta U_n - \mathbb{E}[\Delta U_n | \mathcal{F}_{n-1}]$. Et donc $\mathbb{E}[\Delta M_n | \mathcal{F}_{n-1}] = 0$.

4. Le marché étant complet, toute $\mathbb{P}$-martingale à la propriété de représentation prévisible par rapport à $\tilde{S}_n$. On applique cela à M_n.

5. Par définition de U_n on a $U_n \geq \tilde{Z}_n$ et donc $M_n \geq \tilde{Z}_n$. Donc d'après la question précédente et la définition de $\bar{\pi}$, on a $U_0 \geq \bar{\pi}$.

6. Soit x tq $\exists (\alpha,\beta) \in \mathcal{P}, \exists \tau$ t.a, $V_\tau(-x,\alpha,\beta) \geq -Z_\tau$ puisque $\tilde{V}_\tau(-x,\alpha,\beta) = -x + (\alpha \star \tilde{S})_\tau$ on obtient en prenant l'espérance: $-x \geq -\mathbb{E}[Z_\tau]$ et donc $x \leq \mathbb{E}[Z_\tau] \leq \sup_{\tau, \text{t.a} \leq N} \mathbb{E}[Z_\tau] = U_0$. En passant au sup sur les x on obtient $\underline{\pi} \geq U_0$.

7. On pose $\tau_{\text{opt}} := \inf\{n; U_n = \mathcal{Z}_n\}$. Par le cours $U^{\tau_{\text{opt}}}$ est une martingale et donc $\mathbb{E}[U_{\tau_{\text{opt}}}] = U_0 = \mathbb{E}[M_{\tau_{\text{opt}}}]$. Comme $M_{\tau_{\text{opt}}} \geq U_{\tau_{\text{opt}}}$ on déduit que $M_{\tau_{\text{opt}}} = U_{\tau_{\text{opt}}}$.

8. Puisque le marché est complet, $\exists \alpha \in \mathcal{P}$ t.q $M_n = U_0 + (\alpha \star \tilde{S})_n$. On note β la quantité d'actif non risqué obtenue à partir de $-\alpha$ et l'autofinancement, on a donc trouvé un portefeuille $(-\alpha,\beta)$ et un t.a τ_{opt} tel que $\tilde{V}_{\tau_{opt}}(-U_0,-\alpha,\beta) = -M_{\tau_{opt}} = -\tilde{Z}_{\tau_{opt}}$. Donc $\underline{\pi} \geq U_0$.