Examen final du 4 mai 2017. Durée 3h00.

Barème indicatif: QC: 2pts, E1: 2pts, E2: 4pts Pb: 12pts.

Question de cours: Filtre de Kalman-Bucy
Étant donné un système dynamique aléatoire défini par $X_{n+1} = AX_n + \varepsilon_{n+1}$ avec $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ et $(\varepsilon_n)_n$ une suite i.i.d de v.a dans $\mathbb{R}^d$ de loi $\mathcal{N}(0, Q)$ ($Q \in \mathbb{R}^{d\times d}$) et $X_0 = 0$. Les observations sont données par $Y_n := CX_n + \tau_n$ où $C \in \mathbb{R}^{p\times d}$ et $(\tau_n)_n$ est une suite i.i.d de v.a dans $\mathbb{R}^p$ de loi $\mathcal{N}(0, R)$ où R est supposée inversible. On note $\hat{X}_n := \mathbb{E}[X_n|Y_0, \dots, Y_n]$, $\hat{X}_n^- := \mathbb{E}[X_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}]$ et $J_n := Y_n - \mathbb{E}[Y_n|Y_0, \dots, Y_{n-1}]$.

1. Qu'est ce que J_n ?
2. La matrice de gain de Kalman K_n est définie par $\mathbb{E}[X_n|J_n] = K_nJ_n$. Montrer que $K_n = P_n^- C^*(CP_n^- C^* + R)^{-1}$ où P_n^- est la matrice de covariance de $X_n - \hat{X}_n^-$.

Exercice 1.
On considère un marché à deux temps $t = 0$ et $t = 1$. L'actif sans-risque vaut 1€ à $t = 0$ et 2€ à $t = 1$. L'actif risqué vaut 30€ à la date $t = 0$ et a 85% de chance de valoir 70€ et 15% de chance de valoir 10€ à la date $t = 1$. Calculer le prix, à $t = 0$, d'un call européen de prix d'exercice 40€.

corrigé: Il existe une unique proba risque neutre puisque il y a un unique $p \in]0, 1[$ tel que $p70/2 + (1 - p)10/2 = 30$ et on trouve $p = 5/6$. Le marché est viable et complet et on peut calculer le prix du call européen:

$$\mathbb{E}[\frac{1}{2}(S_1 - 40)^+] = \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} \times 30 = 12,5.$$

Exercice 2.
Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien.

1. Soit $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté continu tel que $\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} \sigma_s^2 ds\right] < +\infty$. Montrer, en utilisant des théorèmes du cours, que $M_t := \int_0^t \sigma_s dB_s$ converge presque sûrement lorsque $t \to +\infty$.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que pour $t > 0$
$$\frac{B_t^2}{(1+t)^{2\alpha}} = 2\int_0^t \frac{B_s}{(1+s)^{2\alpha}} dB_s - 2\alpha \int_0^t \frac{B_s^2}{(1+s)^{2\alpha+1}} ds + \int_0^t \frac{ds}{(1+s)^{2\alpha}}.$$
3. En déduire que si $\alpha > 1/2$ alors $B_t^2/t^{2\alpha}$ converge presque sûrement lorsque t tend vers $+\infty$.
4. En utilisant le lemme de Fatou, identifier cette limite et conclure en ce qui concerne la limite en $+\infty$ de B_t/t^α, pour $\alpha > 1/2$.

corrigé:

1. Puisque $\mathbb{E}[\int_0^t \sigma_s^2 ds]$ est fini pour tout t on en déduit que les martingales locales $(M_t)_{t\geq 0}$ et $(M_t^2 - \int_0^t \sigma_s^2 ds)_t$ sont des vraies martingales. On a donc $\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}[\int_0^t \sigma_s^2 ds]$ et donc $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}[M_t^2] = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[\sigma_s^2] ds < +\infty$. Ainsi d'après le résultat du cours on a que M_t est une martingale qui converge p.s et dans L^2.
2. On applique la formule d'Ito pour le mouvement Brownien avec la fonction $f(t, x) := \frac{x^2}{(1+t)^{2\alpha}}$.
3. Si $\alpha > 1/2$ alors, par Fubini, $\mathbb{E}[\int_0^{+\infty} \frac{B_s^2}{(1+s)^{2\alpha+1}} ds] = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+s)^{2\alpha}} ds < +\infty$ et donc $\int_1^t \frac{B_s^2}{s^{2\alpha+1}} ds$ converge p.s lorsque $t \to +\infty$. De plus par la question précédente le terme martingale $\int_0^t \frac{B_s}{(1+s)^{2\alpha}} dB_s$ converge p.s lui aussi lorsque $t \to +\infty$. D'où le résultat.
4. On note $\ell := \lim_{t\to+\infty} \frac{B_t^2}{t^{2\alpha}}$. Par Fatou : $\mathbb{E}[\ell] \leq \liminf \mathbb{E}[\frac{B_t^2}{t^{2\alpha}}] = 0$ d'où $\ell = 0$. On en déduit aussi que $\lim_{t\to\infty} \frac{B_t}{t^\alpha} = 0$.

Problème.

On considère un marché **à temps discret** de maturité $T \geq 1$, $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}, \mathbb{P})$ dans lequel **l'actif risqué** est défini par

$$\forall t \in \{0,1,\ldots,T\}, \quad S_t := s_0 \exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\right),$$

$\mu \in \mathbb{R}$, $s_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $\sigma \in \mathbb{R}^*$ et $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien (pour la probabilité $\mathbb{P}$) et on suppose que, pour $t \in \{0,1,\ldots,T\}$, $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$.

L'actif non risqué est défini pour $t \in \{0,1,\ldots,T\}$ par $B_t := e^{rt}$ où $r > 0$.

On note, pour $t \in \{1,\ldots,T\}$, $A_t := W_t - W_{t-1}$ et on pose,

$$Z_0 := 1, \quad \text{et}, \quad Z_t := \prod_{s=1}^{t} f_s(A_s),\ \forall t \in \{1,\ldots,T\},$$

où les fonctions f_t sont définies à partir de variables aléatoires X_t par

$$\forall x, \in \mathbb{R}, \quad f_t(x) := \mathbb{E}\left[\exp\left(X_t x - \frac{X_t^2}{2}\right)\right].$$

On suppose que les v.a $(X_1,\ldots,X_T)$ **sont indépendantes et indépendantes des v.a** $(A_1,\ldots,A_T)$**.**

PARTIE I

1. Quelle est la loi du vecteur $(A_1,\ldots,A_T)$?
2. Montrer que $(Z_t)_{t=0,\ldots,T}$ est une $(\mathcal{F}_t)_t$-martingale.

On définit $\mathbb{Q}$ une nouvelle mesure sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ par

$$d\mathbb{Q} := Z_T d\mathbb{P}.$$

3. En déduire que $\mathbb{Q}$ est une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$.
4. Montrer que pour $t \in \{1,\ldots,T\}$,
$$\mathbb{E}\left[f_t(A_t)e^{\sigma A_t}\right] = e^{\frac{\sigma^2}{2}}\mathbb{E}\left[e^{\sigma X_t}\right].$$
5. En déduire que $\mathbb{Q}$ est une mesure martingale si et seulement si
$$\forall t \in \{1,\ldots,T\}, \quad \mathbb{E}\left[e^{\sigma X_t}\right] = e^{r-\mu}.$$
6. Que peut-on dire du marché ?

Corrigé:

1. $(A_1,\ldots,A_T)$ est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance la matrice identité.
2. Puisque si Z est une v.a normale centrée réduite on a $\forall\theta, \mathbb{E}[e^{\theta Z}] = e^{\theta^2/2}$ on en déduit par Fubini-Tonelli et l'indépendance de A_s et X_s que $\mathbb{E}[f_s(A_s)] = 1$. Ainsi par indépendance on a que Z_t est intégrable. Par ailleurs, c'est un processus adapté et puisque $Z_{t+1} = Z_t f_{t+1}(A_{t+1})$ on a que $\mathbb{E}[Z_{t+1}|\mathcal{F}_t] = Z_t$.
3. Z_T est strictement positive et est d'espérance égale à 1 (par propriété de martingale mais par indépendance on a que c'est le produit des $\mathbb{E}[f_s(A_s)] = 1$). Ainsi $\mathbb{Q}$ est une proba équivalente à $\mathbb{P}$.
4. Par indépendance de A_t et X_t et le théorème de Fubini on a
$$\mathbb{E}\left(f_t(A_t)e^{\sigma A_t}\right) = \int_\Omega \mathbb{E}\left[e^{(\sigma+X_t(\omega))A_t}\right]e^{-\frac{X_t^2(\omega)}{2}}\mathbb{P}(d\omega) = \int_\Omega e^{\frac{1}{2}(\sigma+X_t(\omega))^2}e^{-\frac{X_t^2(\omega)}{2}}\mathbb{P}(d\omega) = e^{\frac{\sigma^2}{2}}\mathbb{E}[e^{\sigma X_t}]$$

5. $\mathbb{Q}$ est une mesure martingale si et seulement si $\forall 1 \leq t \leq T$, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}}|\mathcal{F}_{t-1}] = 1$. Or $\frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t-1}} = e^{-\frac{\sigma^2}{2}-r+\mu+\sigma A_t}$ et par la formule de Bayes

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{\sigma A_t}|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}[e^{\sigma A_t}\frac{Z_t}{Z_{t-1}}|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}[e^{\sigma A_t}f_t(A_t)|\mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}[e^{\sigma A_t}f_t(A_t)] = e^{\frac{\sigma^2}{2}}\mathbb{E}[e^{\sigma X_t}].$$

On en déduit donc que $\mathbb{Q}$ est une mesure martingale ssi $\mathbb{E}[e^{\sigma X_t}] = e^{-(\mu-r)}$

6. Le marché est donc viable mais pas complet: il y a autant de mesure martingales possible que de v.a X_t tels que $\mathbb{E}[e^{\sigma X_t}] = e^{-(\mu-r)}$.

PARTIE II

Cette partie est un préliminaire pour la partie III.

7. Pour $(x_1, \dots, x_T) \in \mathbb{R}^T$ et $\psi : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}_+$ mesurable montrer que

$$\mathbb{E}\left[\psi(A_1, \dots, A_T)\prod_{t=1}^{T} e^{A_t x_t - \frac{x_t^2}{2}}\right] = \mathbb{E}[\psi(A_1 + x_1, \dots, A_T + x_T)].$$

8. En déduire que pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable on a l'égalité

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\varphi(S_T)] = \mathbb{E}\left[\varphi\left(s_0 e^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sum_{t=1}^T A_t + X_t}\right)\right].$$

Pour $v \in \mathbb{R}$, on note $\mathbb{Q}_v$ la probabilité correspondante lorsque les variables X_t sont i.i.d et de loi normale de moyenne $-\frac{\mu-r}{\sigma} - \frac{\sigma v^2}{2}$ et de variance v^2.

9. Montrer alors que, pour tout $v \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_v}[\varphi(S_T)] = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(s_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2}(1+v^2))T+\sigma\sqrt{1+v^2}y}\right)\frac{e^{-\frac{y^2}{2T}}}{\sqrt{2\pi T}}dy$$

Corrigé:

1. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\psi(A_1, \dots, A_T)\prod_{t=1}^{T} e^{A_t x_t - \frac{x_t^2}{2}}\right] &= \int_{\mathbb{R}^T}\psi(a_1,\dots,a_T)e^{\sum_t^T a_t x_t - \frac{x_t^2}{2}}e^{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^T a_t^2}da_1\dots da_T \\ &= \int_{\mathbb{R}^T}\psi(a_1,\dots,a_T)e^{-\frac{1}{2}\sum_t^T(a_t-x_t)^2}da_1\dots da_T \\ &= \mathbb{E}[\psi(A_1+x_1,\dots,A_T+x_T)].\end{aligned}$$

2. On a par Fubini et l'indépendance des $(X_t)_{t\in\{1,\dots,T\}}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\varphi(S_T)] = \mathbb{E}[\varphi(S_T)Z_T] &= \int_{\Omega}\mathbb{E}[\varphi(s_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)T+\sigma\sum_{t=1}^T A_t})e^{\sum_{t=1}^T X_t(\omega)A_t - \frac{X_t^2(\omega)}{2}}]\mathbb{P}(d\omega) \\ &= \int_{\Omega}\mathbb{E}[\varphi(s_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)T+\sigma\sum_{t=1}^T A_t + X_t(\omega)})]\mathbb{P}(d\omega) \quad \text{cf question precedente} \\ &= \mathbb{E}[\varphi(s_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)T+\sigma\sum_{t=1}^T A_t+X_t})]. \quad \text{Par independance de } (X_t)_t \text{ et } (A_t)_t\end{aligned}$$

3. Par définition de X_t et indépendance avec les A_t la variable aléatoire

$$(\mu - \sigma^2/2)T + \sum_{t=1}^T A_t + X_t$$

est une gaussienne de moyenne $(\mu-\sigma^2/2)T - \sigma T(\frac{\mu-r}{\sigma} + \frac{\sigma v^2}{2})$ c'est à dire $(r - \frac{\sigma^2}{2}(1+v^2))T$ et de variance $\sigma^2 T(1+v^2)$. Elle s'écrit donc $(r - \frac{\sigma^2}{2}(1+v^2))T + \sigma\sqrt{1+v^2}Y$ où Y suit une loi normal centrée de variance T. D'où la formule demandée en utilisant la question précédente.

PARTIE III

On souhaite maintenant déterminer le prix de *surréplication* d'un put européen de maturité T et de prix d'exercice K. C'est par définition l'infimum sur toutes les valeurs initiales des portefeuilles autofinancés qui surréplique ce put :

$$p := \inf \left\{x \in \mathbb{R}, \quad \exists (\alpha_s)_{1\leq s\leq T} \text{ previsible tel que, } V_T^{x,\alpha} \geq (K - S_T)_+ \right\},$$

où on note $V_t^{x,\alpha}$ la valeur en t d'un portefeuille autofinancé de valeur initiale x et de stratégie α (c'est à dire que α_t est le nombre de parts d'actif risqué du portefeuille au temps t).

10. En considérant un portefeuille particulier montrer que $p \leq Ke^{-rT}$.
11. Montrer que pour toute mesure martingale $\tilde{\mathbb{Q}}$ on a $p \geq e^{-rT}\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}}[(K - S_T)_+]$.
12. En utilisant les probabilités $\mathbb{Q}_v$ de la partie II, montrer que $p = Ke^{-rT}$.

Corrigé:

1. On considère le portefeuille autofinancé de valeur initiale Ke^{-rT} avec la stratégie $\alpha_t = 0 \ \forall t$. Sa valeur en T est donc de $K \geq (K - S_T)^+$ et il surréplique le put. Donc par définition on a $p \leq Ke^{-rT}$.
2. On a $\tilde{V}_T^{x,\alpha} \geq e^{-rT}(K - S_T)^+$ et en prenant l'espérance avec une mesure martingale $\tilde{\mathbb{Q}}$ on a
$$x \geq e^{-rT}\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}}[(K - S_T)^+].$$
En prenant l'inf on obtient donc $p \geq e^{-rT}\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}}[(K - S_T)^+]$
3. On a, pour tout v, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_v}[(K - S_T)^+] = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(s_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2}(1+v^2))T + \sigma\sqrt{1+v^2}y}\right) \frac{e^{-\frac{y^2}{2T}}}{\sqrt{2\pi T}} dy$ avec $\varphi(s) := (K - s)^+$ et par convergence dominée on déduit en faisant tendre v vers $+\infty$ que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_v}[(K - S_T)^+]$ converge vers K. D'où le résultat.