

Mathématiques financières

Peter Tankov

Master 2 ISIFAR

Edition 2013-2014

Preface

Objectifs du cours

L'objet de ce cours est la modélisation financière en temps continu. L'objectif est d'un côté de comprendre les bases de la théorie d'options et d'un autre côté d'acquérir les premières notions de la gestion des risques financiers.

La notion centrale du cours est l'absence d'arbitrage. Un arbitrage est une stratégie d'investissement à coût initial nul, qui a un pay-off positif ou nul à une date future quel que soit le scénario d'évolution du marché, et un pay-off strictement positif dans certains scénarios. Elle permet ainsi, avec probabilité positive, de réaliser un gain sans investissement initial et sans risque.

L'absence d'arbitrage permet de définir le "juste prix" d'un actif comme le prix qui ne conduit pas à une opportunité d'arbitrage. Pour certains actifs le calcul de ce prix de non-arbitrage ne nécessite pas de faire appel à un modèle, pour d'autres on sera obligé de faire des hypothèses sur la dynamique des actifs. Par exemple, la célèbre formule de Black et Scholes pour les prix des options Call et Put suppose que le cours de l'actif sous-jacent peut être décrit par un mouvement brownien géométrique. De même, pour certains actifs et dans certains modèles l'hypothèse d'absence d'arbitrage permet de déterminer l'unique prix ; dans d'autres situations on obtiendra un intervalle non-vide des prix, qui sont tous compatibles avec l'absence d'arbitrage.

Une autre notion centrale est celle de couverture. La couverture est l'utilisation d'une stratégie de trading dans des actifs liquides afin de minimiser ou annuler le risque d'une position financière (a priori, la vente d'une option). Si le prix de vente n'est pas dans l'intervalle des prix compatibles avec l'absence d'arbitrage (par exemple, si la banque a réussi à vendre l'option à un prix plus élevé que le juste prix), alors la couverture permet d'exploiter l'opportunité d'arbitrage et de réaliser un gain sans risque.

Organisation du polycopié

Ce polycopié contient quatre chapitres ; au début de chaque chapitre, en italique, vous trouverez la liste des concepts qui constituent le "socle minimal" des connaissances nécessaires pour valider la matière. La plupart de ces concepts

4

sont encadrés ou mises en évidence d'une autre manière dans le texte des chapitres.

Table des matières

1	Introduction aux produits dérivés	7
1.1	Forwards et futures	7
1.1.1	Equivalence des prix de forwards / futures	8
1.1.2	Valorisation des forwards par non-arbitrage	10
1.2	Introduction aux options	12
1.2.1	Propriétés des prix de calls/puts	14
1.2.2	Option américaines	16
2	La formule de Black et Scholes	19
2.1	Mouvement brownien géométrique	19
2.2	Dynamique d'un portefeuille autofinçant	21
2.3	Construction du portefeuille de réplication	22
2.4	La formule de Black et Scholes	26
2.5	Les grecques	27
2.6	Discrétisation et couverture en gamma	28
2.7	Volatilité implicite	32
3	Valorisation d'options exotiques	35
3.1	Evaluation risque-neutre	35
3.2	Changement de numéraire	42
3.3	Options à barrière et réplication statique	48
3.4	Swaps de variance	52
4	Volatilité locale et la formule de Dupire	55
4.1	Modèles à volatilité locale	55
4.2	Modèle CEV	56
4.3	Arbre trinomial de pricing	58
4.4	Equation et formule de Dupire	62
4.5	Volatilité implicite dans les modèles à volatilité locale	66
4.6	Calibration de la volatilité locale	68
4.6.1	Interpolation de la volatilité implicite	68

Chapitre 1

Introduction aux produits dérivés

- *Différents types des taux d'intérêt.*
- *Formule de valorisation d'un forward sur un actif financier (action, obligation).*
- *Classification des options et terminologie associée, forme des fonctions pay-off.*
- *Propriétés des prix des calls / puts en fonction du strike et du temps restant jusqu'à maturité.*
- *Stratégies classiques optionnelles : bull spread, bear spread, calendard spread, butterfly spread.*
- *Equivalence entre un call américain et un call européen.*

1.1 Forwards et futures

Un forward est un contrat entre deux contreparties dans lequel l'une des contreparties s'engage à vendre et l'autre à acheter un bien à une date donnée (notée par T), à un prix donné (le prix à terme ou prix forward du bien). Le prix et les autres caractéristiques du contrat sont donc déterminés à la signature (date 0) mais la livraison et le paiement ont lieu à l'échéance (date T). On dit que la partie qui s'engage à acheter le bien a une position longue, et la partie qui s'engage à vendre a une position courte. Les forwards, comme les autres produits dérivés, sont utilisés pour transférer les risques entre les participants du marché, pour la spéculation, ou bien pour exploiter des arbitrages potentiels.

- **Transfert des risques :** une compagnie travaillant à l'export peut utiliser des forwards sur taux de change pour éliminer le risque de fluctuation du cours d'une devise étrangère.
- **Spéculation :** un investisseur qui pense que le cours d'un indice va monter peut prendre une position longue en forwards sur cet indice pour réaliser

un gain dans le cas d'un mouvement favorable du cours sans avoir à déboursier immédiatement de l'argent (ce qui serait nécessaire en investissant directement dans l'indice). Cette stratégie n'est pas une stratégie d'arbitrage car elle comporte un risque de perte dans le cas d'un mouvement défavorable du cours de l'indice.

- **Arbitrage** : si les forwards sont surévalués par rapport à la valeur du bien sous-jacent, on peut réaliser un gain sans risque en prenant une position courte en forwards et en achetant simultanément le bien pour le stocker jusqu'à l'échéance. Ainsi, la livraison du bien est assurée, et on récupère la différence entre le prix à terme et le prix spot (comptant) du bien, moins le coût de l'opération (financement + stockage).

Un future est un contrat qui permet de réaliser les mêmes objectifs qu'un contrat forward, mais qui est coté dans un marché organisé. Le rôle du marché est d'assurer la liquidité et d'éliminer le risque de contrepartie. La liquidité est assurée puisque les contrats sont standardisés : le nombre de différentes dates de livraison est limité et les sous-jacents sont décrits de manière précise. Ainsi, le nombre de différents contrats cotés est relativement faible et par conséquent, le volume pour chaque contrat est élevé ce qui permet de facilement trouver un acheteur / vendeur. De plus, pour chaque contrat standardisé le cours est publié en continu, rendant la valorisation plus transparente. Le risque de contrepartie est éliminé puisque tous les contrats ont une contrepartie unique : la chambre de compensation du marché, qui a très peu de chances de faire faillite.

Pour se protéger contre le défaut des participants du marché, la chambre de compensation utilise le dépôt de garantie et les appels de marge. Lorsqu'un agent prend une position courte ou longue sur un contrat future, il doit déposer un montant spécifique, qui dépend du cours du future, sur un compte ouvert auprès de la chambre de compensation (margin account). Ensuite, ce compte est crédité ou débité tous les jours d'un montant qui dépend de l'évolution du cours du future. Soit F_t le cours de cloture du future à la date t . Si l'investisseur a pris une position longue, à la date t son compte va être crédité d'un montant égal à $F_t - F_{t-1}$, et s'il a pris une position courte, son compte sera débité de ce même montant. Lorsque le solde du compte baisse au-delà d'un certain niveau, l'investisseur reçoit un appel de marge, qui l'informe qu'il doit compléter son dépôt initial par un montant approprié. Si le solde du compte devient élevé, l'investisseur peut en retirer une partie. A la date d'échéance du contrat, le compte est une dernière fois crédité / débité d'un montant égal à $F_T - F_{T-1}$, et le solde est remis à l'investisseur. Dans le cas d'un future avec règlement financier, le contrat s'arrête là ; avec livraison physique l'investisseur se voit livrer le bien sous-jacent et doit le payer au prix F_T .

1.1.1 Equivalence des prix de forwards / futures

Avant de procéder, il est important de fixer les notations concernant les taux d'intérêt.

Taux d'intérêt De manière générale le taux d'intérêt est une convention ; la quantité fondamentale sur les marchés est le coût du capital (prix d'une obligation), qui est unique ; mais ce prix peut être exprimé de différentes manières avec des taux d'intérêt différents.

Nous noterons par $B_t(T)$ le prix d'une obligation zéro-coupon d'échéance T observé à la date t . Pour simplifier la notation, nous noterons parfois le prix de cette obligation observé à la date $t = 0$ simplement par $B(T)$.

Dans ce poly, nous utiliserons essentiellement deux taux d'intérêt :

- Le taux périodique est défini par rapport à une période : jour, mois, année. Le prix d'une obligation zéro-coupon d'échéance T est alors donné par

$$B(T) = \frac{1}{(1+r)^T},$$

où r est le taux périodique et T est le nombre de périodes jusqu'à l'échéance (T est exprimé en années pour le taux annuel, en mois pour le taux mensuel etc.)

- Le taux continu ou exponentiel correspond à l'expression du prix de zéro-coupon

$$B(T) = e^{-rT},$$

où T est le temps jusqu'à l'échéance exprimé en années.

Théorème 1. *Supposons que le taux d'intérêt périodique journalier r est constant et le même pour les prêts et les emprunts. Alors le prix à terme d'un bien doit être égal, à toute date, au cours du contrat future de même échéance portant sur le même bien.*

Démonstration. Soit n l'échéance du contrat forward. On note par f_0 le prix à terme à la date 0 et par F_k le cours du contrat future de même échéance à la date $k \leq n$. On utilise la stratégie suivante :

Date 0	Prendre une position longue sur $(1+r)^n$ forwards d'échéance n et une position courte sur $1+r$ futures de même échéance
Date $k, 0 < k < n$	Payer l'appel de marge d'un montant $(1+r)^k(F_k - F_{k-1})$; ajuster la position en contrats futures à $(1+r)^{k+1}$ contrats
Date n	Payer le dernier appel de marge d'un montant $(1+r)^n(F_n - F_{n-1})$

On suppose que les montants des appels de marge payés / reçus aux dates intermédiaires sont soit empruntés à la banque au taux r soit placés au taux r (en fonction de leur signe) ; l'appel payé ou reçu à la date k doit donc être actualisé au taux r entre la date k et la date n . Par ailleurs, à la date n , on est long de $(1+r)^n$ forwards et court de $(1+r)^n$ contrats futures, qui arrivent tous à l'échéance. Le bilan de l'opération est donc

Appels de marge actualisés :	$-(1+r)^n(F_n - F_0)$
Contrats futures :	$(1+r)^n(F_n - S_n)$
Contrats forward :	$(1+r)^n(S_n - f_0)$
Soit au total :	$(1+r)^n(F_0 - f_0)$

Supposons que $F_0 > f_0$. Alors cette stratégie, à coût nul, est clairement un arbitrage. Si, au contraire, $F_0 < f_0$, alors la stratégie opposée (position courte en forwards et longue en futures) est un arbitrage. On conclut que f_0 doit être égal à F_0 : le cours d'un contrat future est égal au prix à terme. \square

1.1.2 Valorisation des forwards par non-arbitrage

En vue de l'équivalence entre forwards et futures démontrée au paragraphe précédent, nous nous concentrons désormais sur la valorisation des forwards. Le premier exemple concerne le forward sur un actif pouvant être vendu à découvert : un actif financier, ou un marchandise non-périssable qui est utilisé comme un investissement et peut être emprunté pour être vendu à découvert (par exemple, metal précieux).

Théorème 2 (Forward sur un actif pouvant être vendu à découvert). *Le prix à terme d'échéance T d'un actif pouvant être vendu à découvert est donné par*

$$F = e^{rT}(S - I),$$

où S est le prix spot et I est la valeur présente en $T = 0$ des dividendes (coupons) versés par l'actif (dans ce cas $I > 0$) ou bien le coût de stockage de l'actif entre 0 et T , payable en $T = 0$ (dans ce cas $I < 0$).

Démonstration. Supposons dans un premier temps que $F > e^{rT}(S - I)$. Alors, la stratégie suivante à coût nul, permet de réaliser un gain de $F - e^{rT}(S - I)$. C'est donc un arbitrage (connu sous le nom d'arbitrage cash and carry).

Date 0	Prendre une position courte sur le forward; emprunter le montant S (si $I \geq 0$) ou $S - I$ (si $I < 0$) à la banque; acheter l'actif; payer le coût de stockage (si ($I < 0$))
Entre 0 et T	Stocker l'actif; le cas échéant, récupérer les dividendes (coupons) et les placer à la banque
Date T	Livrer l'actif et récupérer le montant F dans le cadre du contrat forward; si $I < 0$, rembourser $e^{rT}(S - I)$ à la banque; si $I \geq 0$, rembourser $e^{rT}S$ à la banque et récupérer les dividendes capitalisés Ie^{rT} .

Cet argument montre que nécessairement $F \leq e^{rT}(S - I)$: puisque le forward permet de posséder l'actif à la date T , le prix à terme ne peut être supérieur au prix spot de l'actif plus le coût additionnel du capital nécessaire pour acheter l'actif aujourd'hui au lieu de le faire à la date T moins le montant de dividendes qu'on touche si on détient l'actif entre 0 et T . Remarquons que pour l'inégalité dans ce sens, la vente à découvert n'est pas nécessaire; cette inégalité a donc une

validité plus large que l'inégalité dans le sens opposé que nous allons maintenant démontrer.

Supposons maintenant que $F < e^{rT}(S - I)$. Alors, la stratégie suivante est un arbitrage.

- Date 0 Prendre une position longue sur le forward ; vendre l'actif à découvert (l'emprunter puis le vendre) ; récupérer le coût de stockage (si $I < 0$) ; placer le montant S (si $I \geq 0$) ou $S - I$ (si $I < 0$) à la banque ;
- Date T Si $I < 0$, récupérer $e^{rT}(S - I)$ à la banque ; si $I \geq 0$, récupérer $e^{rT}S$ à la banque. Prendre livraison de l'actif moyennant le paiement du prix F dans le cadre du contrat forward ; restituer l'actif à celui à qui on l'avait emprunté ; si $I > 0$, lui verser les dividendes capitalisés Ie^{rT} .

Puisque cette deuxième stratégie nécessite de vendre à découvert l'actif, elle est plus difficile à mettre en place ; le prêt de l'actif ne sera typiquement pas gratuit (taux repo) et il y a le danger de rachat forcé : les courtiers forcent souvent leurs clients à racheter les titres vendus à découvert lorsque leurs prix montent trop brutalement. \square

Forwards sur marchandises Lorsque le sous-jacent du contrat forward est un bien non-financier, qui est détenu non pas comme investissement mais par exemple parce qu'il fait partie d'un cycle de production, il n'est en général pas possible de l'emprunter pour le vendre à découvert. Dans ce cas le prix forward vérifie uniquement

$$F \leq e^{rT}(S + U),$$

où U est le coût de stockage, avec en général une inégalité stricte. La différence entre la partie droite et la partie gauche correspond à l'utilité additionnelle que l'agent économique tire du fait qu'il détient physiquement l'actif :

$$F = e^{rT}(S + U - Y).$$

Pour avoir des quantités indépendantes du temps et du volume, on écrit souvent

$$F = F(T) = e^{(r+u-y)T} S,$$

où u est le coût de stockage par unité de temps et par unité d'actif, et y est appelé la prime de convenance (convenience yield). Si l'actif est facilement disponible sur le marché, la prime de convenance n'est pas très élevée et $r + u - y > 0$: la courbe des prix à terme $(F(T))_{T \geq 0}$ est croissante ; on dit qu'elle est en report (ou en contango en anglais). S'il y a un risque de rupture des stocks, il est important de détenir l'actif physiquement pour assurer la continuité de production et la prime de convenance peut être élevée : dans ce cas, $r + u - y < 0$ et la courbe des prix à terme est décroissante ; on dit qu'elle est en déport (backwardation en anglais).

1.2 Introduction aux options

Les options les plus simples, de type Call et Put, sont une extension très naturelle des forwards : alors qu'un forward donne à son détenteur l'obligation d'acheter / vendre l'actif sous-jacent à une date future à un prix déterminé, l'option Call européen donne à son détenteur le droit mais non l'obligation d'acheter l'actif sous-jacent à une date d'échéance future T à un prix déterminé K , appelé prix d'exercice ou strike, et l'option Put européen donne le droit mais non l'obligation de vendre l'actif sous-jacent au prix K à la date T . Les options Call et Put américaines donnent le droit d'acheter ou vendre l'actif sous-jacent à la date T ou à toute date future antérieure à T .

Lorsqu'à la date T , le détenteur d'un Call ou Put exerce le droit que lui confère son option, il touche $S_T - K$ pour un Call et $K - S_T$ pour un Put. Il est clair qu'il n'exercera son droit que si le montant qu'il récupère est positif : le détenteur d'un Call touche donc systématiquement le montant

$$H_T = (S_T - K)^+$$

et pour un Put, le montant

$$H_T = (K - S_T)^+,$$

où la notation $()^+$ désigne la partie positive. Ce montant H_T s'appelle le pay-off de l'option.

Terminologie

- K : *strike* (prix d'exercice).
- T : date de maturité (échéance).
- Une option est *à la monnaie* à la date t si à cette date $K = S_t$.
- Une option est *dans la monnaie* : si elle devait expirer aujourd'hui son pay-off serait positif.
- La *valeur intrinsèque* d'une option est la quantité d'argent qu'elle rapporterait si elle devait expirer aujourd'hui (la valeur du pay-off aujourd'hui).
- La *valeur temps* d'une option est égale à son prix moins sa valeur intrinsèque.

Notation

Nous noterons par $\text{Call}_t(T, K)$ le prix d'un Call européen d'échéance T et strike K observé à la date t . Nous écrirons parfois également $\text{Call}(T, K)$ lorsque $t = 0$. Le prix d'un Call américain sera noté par $\text{CallAmer}_t(T, K)$, et les prix des Puts européen et américain, respectivement, par $\text{Put}_t(T, K)$ et $\text{PutAmer}_t(T, K)$.

Les options plus complexes, qu'on appelle les options exotiques, dont quelques exemples sont donnés ci-dessous, sont souvent définies directement en termes de leur pay-off.

- Options à barrière : le paiement a lieu (n'a pas lieu) si le sous-jacent a dépassé un niveau contractuel (la barrière) avant cette date. Exemple (up and out call)

$$H_T = (S_T - K)^+ 1_{M_T < B}, \quad \text{où} \quad M_T = \max_{t \leq u \leq T} S_u$$

- L'intérêt de cette option est qu'elle est moins chère que la call standard mais offre des garanties très similaires en situation normale (si la barrière est suffisamment haute).
- Options asiatiques : le payoff dépend de la valeur moyenne du cours de l'actif sous-jacent pendant la vie de l'option (pour empêcher la manipulation des prix) :

$$H_T = \left(\frac{1}{T-t} \int_t^T S_u du - K \right)^+$$

- Options multi-sous-jacent : sur un panier d'actions, un panier de taux de change etc.

$$H_T = \left(\sum_{i=1}^n w_i S_T^i - K \right)^+$$

- Options forward start. Le strike d'une telle option est déterminé à une date future selon une règle spécifique, par exemple,

$$H_T = (S_T - mS_{T_0})^+,$$

où $T_0 < T$ est une date future et m est un nombre fixé dans le contrat (moneyness de l'option).

Comme les futures et les forwards, les options peuvent être utilisées pour le transfert des risques, pour prendre des paris sur l'évolution des actifs de base, et éventuellement pour exploiter des arbitrages potentiels, tout en offrant beaucoup plus de liberté et souplesse dans ces utilisations. Les deux exemples suivants illustrent l'utilisation d'options pour contrôler et limiter les risques associés aux fluctuations des cours boursiers.

Exemple 1 (Put protectif). Un Put protectif est une combinaison d'une position longue dans un actif et d'une option Put sur le même actif. Le pay-off à l'échéance de l'option est alors donné par $H_T = (K - S_T)^+ + S_T = \max(S_T, K)$. Ce montage permet donc de limiter les pertes à un niveau K souhaité.

Exemple 2 (Constitution d'un fonds garanti). Certains fonds d'investissement offrent à leurs clients une garantie de performance minimale. Ce type de garantie peut être mis en place en utilisant des options. Supposons que l'investissement initial est normalisé à 1, et que l'investisseur est assuré de recevoir au moins K à l'échéance T . Pour ne pas créer une opportunité d'arbitrage, la valeur K , appelée le plancher, doit être choisi de sorte que $KB(T) < 1$, où $B(T)$ est le prix d'une obligation zéro-coupon d'échéance T . La stratégie suivante permet alors de respecter la contrainte tout en gardant un potentiel de gain :

- Investir une fraction λ du fonds dans l'actif risqué S . Pour simplifier la notation nous supposons que la valeur initiale de l'actif risqué a également été normalisée à 1.
- Utiliser le montant résiduel pour l'achat d'un Put sur λS d'échéance T et strike K , ou, de manière équivalente, λ Puts sur S de strike K/λ .

Le pay-off de la partie optionnelle à la date T est égal à $(K - \lambda S_T)^+$, et la valeur du fonds est donnée par

$$\lambda S_T + (K - \lambda S_T)^+ = \max(K, \lambda S_T).$$

Pour que cette allocation soit réalisable, la valeur λ doit vérifier la contrainte du budget : la somme du montant investi en l'actif risqué et du prix de l'option doit valoir 1 :

$$\lambda + \text{Put}^{\lambda S}(T, K) = 1, \quad (1.1)$$

où $\text{Put}^{\lambda S}(T, K)$ est le prix de l'option sur λS d'échéance T et strike K . Soit

$$f(\lambda) = \lambda + \text{Put}^{\lambda S}(T, K)$$

Alors, $f(0) = KB(T) < 1$ et $f(1) = 1 + \text{Put}^S(T, K) > 1$. Donc, si $f(\lambda)$ est une fonction continue, il existe $\lambda^* \in (0, 1)$ qui vérifie (1.1).

En tant qu'un produit spéculatif, les options permettent de prendre des paris sur certains scénarios d'évolution du marché selon les stratégies suivantes.

Stratégies optionnelles

- L'achat d'un Call permet de parier sur la hausse du sous-jacent, et l'achat d'un Put sur la baisse, avec beaucoup plus de levier, mais aussi beaucoup plus de risque que l'achat du sous-jacent lui-même.
- Le Bull spread (achat d'un Call de strike K_1 , vente d'un Call de strike $K_2 > K_1$, de même échéance) et le Bear spread (vente d'un Put de strike K_1 , achat d'un Put de strike $K_2 > K_1$, de même échéance) sont aussi des paris directionnels ; ils ont l'avantage d'être moins chers que les options elle-mêmes, mais les gains sont limités.
- Le Straddle (achat simultané d'un Call et un Put de même strike, typiquement choisi égal à la valeur présente du sous-jacent, et même échéance) permet de parier sur la hausse de volatilité du sous-jacent (plus le sous-jacent s'éloigne de sa valeur présente, plus le straddle va rapporter).
- Le Butterfly spread (achat d'un Call de strike $K - h$ et d'un Call de strike $K + h$; vente de 2 Calls de strike K , tous de même échéance — où le strike K est typiquement égal à la valeur présente du sous-jacent) permet de parier sur la baisse de la volatilité : le pay-off est maximal si le sous-jacent reste proche de sa valeur.
- Le calendar spread (achat d'un Call de strike K et échéance T_1 et vente d'un Call de strike K et échéance $T_2 < T_1$) permet également de parier sur la hausse de la volatilité.

1.2.1 Propriétés des prix de calls/puts

Dans cette section, pour obtenir les relations vérifiées par les prix des différentes options, nous allons employer une propriété plus faible que l'absence d'arbitrage : la non-domination.

Définition 1 (Propriété de non-domination). Soit X le gain terminal d'une stratégie de coût initial x . Si $X \geq 0$ dans tous les états de la nature alors $x \geq 0$.

Il est facile de voir qu'il existent des marchés vérifiant la non-domination et admettant des arbitrages.

Parité call-put Supposons dans un premier temps que l'actif sous-jacent ne verse pas de dividende. Alors, les prix du Call et du Put de même strike et même échéance sont liés par la relation suivante :

$$\text{Call}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) = S_t - KB_t(T),$$

En effet, à la date T , on a

$$\text{Call}_T(T, K) - \text{Put}_T(T, K) = (S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K.$$

Par le principe de non-domination, à la date t , la différence entre le prix du Call et le prix du Put de même strike et échéance doit donc être égale au prix d'un portefeuille dont la valeur à la date T est $S_T - K$, c'est-à-dire à $S_t - KB_t(T)$.

Bornes sur les prix des calls et puts En conséquence de la parité call-put, on obtient les bornes suivantes pour les prix de calls / puts :

$$(S_t - K)^+ < (S_t - KB_t(T))^+ \leq \text{Call}_t(T, K) \leq S_t. \quad (1.2)$$

$$(KB_t(T) - S_t)^+ \leq \text{Put}_t(T, K) \leq KB_t(T). \quad (1.3)$$

La valeur temps d'une option Call sur un actif ne versant pas de dividende est donc toujours positive.

Dépendance des prix d'options par rapport aux paramètres

– Le prix d'un Call est décroissant par rapport au strike (et le prix d'un Put est croissant)

$$K_1 \leq K_2 \quad \Rightarrow \quad \text{Call}(T, K_1) \geq \text{Call}(T, K_2).$$

Cette propriété découle de l'existence de la stratégie Bull spread qui consiste à acheter un Call de strike K_1 et à vendre un Call de strike K_2 . Comme cette stratégie a un pay-off positif, son prix doit être positif. De plus, le pay-off d'un Bull spread ou d'un Bear spread est borné par $|K_2 - K_1|$; cela implique que $\text{Call}_t(T, K)$ et $\text{Put}_t(T, K)$ sont Lipschitz en K avec la constante $B_t(T)$.

– Les prix des Calls/Puts sont convexes par rapport au strike. Cette propriété correspond à la stratégie Butterfly spread. On vérifie que cette stratégie a également un pay-off positif dans tous les états de la nature ce qui implique la convexité.

– Le prix d'un Call est croissant avec la maturité : $T_1 \leq T_2$ implique $\text{Call}(T_1, K) \leq \text{Call}(T_2, K)$. Cette propriété correspond à la stratégie Calendar spread : acheter un Call de maturité T_2 et vendre un Call de même strike de maturité T_1 . A la date T_1 , cette stratégie a un pay-off positif par (1.2); son prix doit donc être positif à toute date.

Cas d'un sous-jacent versant des dividendes Pour des options sur un sous-jacent versant des dividendes la relation de parité Call-Put est modifiée. A l'échéance nous avons toujours

$$\text{Call}_T(T, K) - \text{Put}_T(T, K) = S_T - K,$$

cependant pour percevoir ce flux à la maturité, il n'est pas nécessaire d'investir $S_t - B_t(T)K$ à la date t . Si l'action verse des dividendes discrets connus D_1, \dots, D_N aux dates $t_1, \dots, t_N < T$, alors en achetant une action et en empruntant

$$\sum_{i=1}^N D_i B_t(t_i) + K B_t(T)$$

à la banque à la date t , on aura le flux $S_T - K$ à la date T . La parité Call-Put devient donc

$$\text{Call}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) = S_t - \sum_{i=1}^N D_i B_t(t_i) - K B_t(T).$$

Pour les indices contenant plusieurs actions, on utilise un général l'approximation de taux de dividende continu, i.e., on suppose que l'indice S_t verse en continu un dividende égal à $qS_t dt$. Dans ce cas il est facile de voir que pour s'assurer d'avoir S_T à la maturité, on doit investir le montant $S_t D_t(T)$ à la date t , où $D_t(T) = e^{-q(T-t)}$. La parité Call-Put devient donc

$$\text{Call}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) = S_t D_t(T) - K B_t(T).$$

La dérivation des bornes analogues à (1.2)–(1.3) est laissée en exercice.

1.2.2 Option américaines

Pour les options américaines, l'exercice est possible à toute date t avant la maturité T ou à la maturité. Le prix d'une option américaine est donc en général supérieur au prix de l'option européenne correspondante :

$$\text{CallAmer}_t(T, K) \geq \text{Call}_t(T, K), \quad \text{PutAmer}_t(T, K) \geq \text{Put}_t(T, K).$$

La différence entre les deux prix s'appelle la *prime d'exercice anticipée*. Dans le cas particulier du Call américain sur un actif ne versant pas de dividende, par la formule (1.2), on a

$$\text{CallAmer}_t(T, K) \geq \text{Call}_t(T, K) > (S_t - K)^+, \quad t < T.$$

En l'absence de dividendes, il n'est donc jamais optimal d'exercer le call américain avant l'échéance, et le prix du call américain est égal au prix de l'option européenne correspondante.

Pour le Put, la situation est très différente. Supposons qu'à une date t , $S_t < K(1 - B_t(T))$. Alors l'exercice immédiat de l'option rapporte $K - S_t >$

$KB_t(T)$, alors que le prix de l'option européenne est borné par $KB_t(T)$ par la formule (1.3). Dans cette situation, le prix du Put américain est donc strictement supérieur à celui du Put européen et la prime d'exercice anticipée est strictement positive. Il est alors intéressant de comprendre de combien le prix du Put américain peut excéder le prix du Put européen. Le résultat suivant donne une réponse à cette question.

Théorème 3. *Supposons que le taux d'intérêt est constant et égal à r . Alors,*

$$\text{PutAmer}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) \leq K(1 - e^{-r(T-t)}).$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque pour $s > t$

$$(K - S_s)^+ \leq (Ke^{-(r+\varepsilon)(T-s)} - S_s)^+ + K(1 - e^{-(r+\varepsilon)(T-t)}),$$

le prix à la date t d'un Put américain est majoré par la somme du prix d'une option américaine qui verse $(Ke^{-(r+\varepsilon)(T-s)} - S_s)^+$ si elle est exercée en s et de la quantité $K(1 - e^{-(r+\varepsilon)(T-t)})$. Or,

$$(Ke^{-(r+\varepsilon)(T-s)} - S_s)^+ < (Ke^{-r(T-s)} - S_s)^+ \leq \text{Put}_s(T, K),$$

ce qui montre que cette option américaine modifiée ne sera jamais exercée avant l'échéance, et que donc son prix coïncide avec le prix du Put européen. On en déduit :

$$\text{PutAmer}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) \leq K(1 - e^{-(r+\varepsilon)(T-t)}),$$

et en faisant tendre ε vers zéro, le théorème est démontré. \square

Chapitre 2

La formule de Black et Scholes

- *Le modèle de Black-Scholes-Samuelson (mouvement brownien géométrique) pour le cours d'un actif. Volatilité et espérance de rendement du prix dans ce modèle.*
- *Volatilité et espérance de rendement d'un processus de prix arbitraire; calcul à l'aide de la formule d'Itô.*
- *Dynamique d'un portefeuille autofinçant avec un seul actif risqué; notion du levier financier; actualisation.*
- *Stratégie de réplcation d'une option européenne dans le modèle de Black-Scholes. EDP de Black-Scholes. Couverture en delta.*
- *Evaluation des prix des options européennes par espérance risque-neutre. Formule de Black-Scholes.*
- *Rôle, expression et propriétés des sensibilités (grecques tels que Delta, Vega, Gamma, Rho, Theta) des options Call et Put dans le modèle de Black-Scholes.*
- *Robustesse de la formule de Black-Scholes.*
- *Volatilité implicite : définition, algorithme de calcul, phénomène de smile de volatilité implicite.*

2.1 Mouvement brownien géométrique

Soit (W_t) un mouvement brownien standard. Le modèle de Black-Scholes-Samuelson pour le prix d'un actif risqué s'écrit

$$S_t = S_0 e^{\left(b - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t}. \quad (2.1)$$

On suppose par ailleurs qu'il existe un actif sans risque dont le prix à l'instant t est $S_t^0 = e^{rt}$. Pour terminer la description de notre marché, nous supposons

également qu'il est possible d'acheter ou vendre l'un ou l'autre actif sans coût de transaction ni restriction sur le volume, et que sur le marché il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage.

Pour comprendre l'origine du terme $\frac{\sigma^2}{2}t$ dans l'exponentielle, calculons l'espérance et la variance du rendement de l'actif risqué entre t_{i-1} et t_i , $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$:

$$R_{t_i} = \frac{S_{t_i} - S_{t_{i-1}}}{S_{t_{i-1}}} \Rightarrow \mathbb{E}[R_{t_i}] = e^{b\Delta t_i} - 1 = b\Delta t_i + O(\Delta t_i^2),$$

$$\text{Var}[R_{t_i}] = e^{2b\Delta t_i}(e^{\sigma^2\Delta t_i} - 1) = \sigma^2\Delta t_i + O(\Delta t_i^2).$$

La *volatilité* d'un actif est traditionnellement définie comme l'écart type des rendements. Comme le taux d'intérêt, la volatilité doit être rapportée à une période de temps : on parle de la volatilité journalière, mensuelle, annualisée etc. Dans ce cours, on utilisera exclusivement la volatilité annualisée, qui est donc donnée par

$$\sqrt{\frac{\text{Var}[R_{t_i}]}{\Delta t_i}}$$

On voit alors que dans l'écriture (2.1), σ représente la volatilité annualisé de l'actif sur une petite période. Dans la suite, on dira simplement que σ est la volatilité du prix dans le modèle de Black-Scholes. Le coefficient b , quant à lui, représente l'espérance annualisé du rendement.

Une autre façon d'écrire la formule (2.1) est sous forme d'une équation différentielle stochastique (l'EDS classique de Black-Scholes-Samuelson)

$$\frac{dS_t}{S_t} = bdt + \sigma dW_t. \quad (2.2)$$

Le lien entre les deux formules peut être établi par la formule d'Itô.

Dans le modèle de Black-Scholes, la volatilité apparaît donc comme le coefficient devant le brownien dans l'écriture (2.2) pour le processus de prix.

Par analogie avec le modèle Black-Scholes, lorsque le processus de prix d'un actif peut être écrit sous la forme (2.2), on appellera le coefficient devant le brownien sa volatilité, et le coefficient devant dt espérance du rendement.

Par exemple, supposons que le prix d'une option est donnée par une fonction connue du prix du sous-jacent vérifiant le modèle de Black-Scholes : $P_t = u(t, S_t)$. Alors, par la formule d'Itô on peut écrire

$$\frac{dP_t}{P_t} = \frac{\frac{\partial u}{\partial t} + bS_t \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2}}{u(t, S_t)} dt + \frac{\sigma S_t \frac{\partial u}{\partial S}}{u(t, S_t)} dW_t$$

On voit alors que la volatilité du prix de l'option est donnée par

$$\frac{\sigma S_t \frac{\partial u}{\partial S}}{u(t, S_t)}.$$

2.2 Dynamique d'un portefeuille autofinçant

On considère un portefeuille financier contenant une certaine quantité de l'actif sans risque et une certaine quantité de l'actif risqué. On suppose que le gérant de ce portefeuille peut modifier les positions en vendant l'actif sans risque pour acheter l'actif risqué et vice versa, mais à aucun moment l'argent n'est rajouté ni retiré du portefeuille. Un tel portefeuille s'appelle un portefeuille autofinçant. Soit δ_t le nombre d'unités de l'actif risqué et X_t la valeur du portefeuille à l'instant t . En supposant dans un premier temps que le portefeuille est reajusté aux dates discrètes t_1, \dots, t_n , son évolution entre deux dates de réajustement consécutives est

$$X_{t_{i+1}} - X_{t_i} = \delta_{t_i}(S_{t_{i+1}} - S_{t_i}) + (X_{t_i} - \delta_{t_i}S_{t_i}) \frac{S_{t_{i+1}}^0 - S_{t_i}^0}{S_{t_i}^0}$$

En passant aux quantités infinitésimales, on a alors

L'équation du portefeuille autofinçant exprimée en termes du nombre d'unités de l'actif risqué

$$dX_t = \delta_t dS_t + (X_t - \delta_t S_t) r dt.$$

Lorsque le prix du portefeuille X_t est tout le temps positif, on peut exprimer la stratégie d'investissement de manière équivalente en termes de la proportion (ou poids) de la richesse totale investie en l'actif risqué, notée par ω_t . Cette proportion est reliée au nombre d'unités à acheter via $\omega_t = \frac{\delta_t S_t}{X_t}$.

En termes de la proportion investie en actif risqué, l'équation du portefeuille autofinçant devient

$$\frac{dX_t}{X_t} = (1 - \omega_t)r dt + \omega_t \frac{dS_t}{S_t} = (\omega_t b + (1 - \omega_t)r) dt + \omega_t \sigma dW_t.$$

On voit que la volatilité d'un portefeuille qui investit la proportion ω_t dans l'actif risqué est égale à $\omega_t \sigma$, et que son espérance de rendement en excès du rendement de l'actif sans risque est égale à $\omega_t(b - r)$. Dans ce portefeuille, le montant investi en l'actif sans risque est donné par $X_t(1 - \omega_t)$, c'est-à-dire, si $\omega_t > 1$, la stratégie consiste à emprunter pour investir un montant supérieur à la valeur du portefeuille en l'actif risqué. Dans ce cas, on dit que le portefeuille comporte un levier. Le levier augmente à la fois l'espérance du rendement et le risque (volatilité) du portefeuille.

Actualisation Ces expressions et le traitement qui va suivre se simplifient en choisissant l'actif sans risque comme *numéraire*, c'est-à-dire en exprimant la valeur du portefeuille, et celle de l'actif risqué non pas en euros mais en nombre d'unités de l'actif sans risque :

$$\tilde{X}_t = \frac{X_t}{S_t^0}, \quad \tilde{S}_t = \frac{S_t}{S_t^0}.$$

On a alors (à vérifier en exercice)

$$\tilde{X}_{t_{i+1}} - \tilde{X}_{t_i} = \delta_{t_i} (\tilde{S}_{t_{i+1}} - \tilde{S}_{t_i}),$$

où, en temps continu,

$$d\tilde{X}_t = \delta_t d\tilde{S}_t.$$

2.3 Construction du portefeuille de réplication

On souhaite répliquer une option européenne (type call ou put) de payoff à l'échéance T donné par $g(S_T)$. Si on arrive à construire un portefeuille autofinçant tel que $X_T = g(S_T)$, alors, par l'absence d'arbitrage, la valeur (l'unique prix qui ne génère pas d'opportunité d'arbitrage) de l'option en $t = 0$ doit être égale à la valeur du portefeuille de réplication, donc à X_0 .

Soit $\tilde{v}(t, S) : [0, T] \times (0, \infty)$ une fonction du temps et de la valeur du sous-jacent appartenant à la classe $C^{1,2}$. Nous allons identifier les conditions que cette fonction doit vérifier pour qu'elle représente la valeur actualisée de l'option, mais dans un premier temps, cherchons un portefeuille autofinçant qui réplique cette fonction, c'est-à-dire qu'il vérifie $\tilde{X}_t = \tilde{v}(t, \tilde{S}_t)$.

Commençons par analyser l'évolution de $\tilde{v}(t, \tilde{S}_t)$ entre 0 et T . Avec un développement en série de Taylor d'ordre 1 en t et d'ordre 2 en \tilde{S} , pour $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$,

$$\begin{aligned} \tilde{v}(T, \tilde{S}_T) &= \tilde{v}(0, \tilde{S}_0) + \sum_{i=1}^n \{ \tilde{v}(t_i, \tilde{S}_{t_i}) - \tilde{v}(t_{i-1}, \tilde{S}_{t_{i-1}}) \} \\ &\approx \tilde{v}(0, \tilde{S}_0) + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}(t_{i-1}, \tilde{S}_{t_{i-1}}) \Delta t_i + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial S}(t_{i-1}, \tilde{S}_{t_{i-1}}) \Delta \tilde{S}_{t_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial S^2}(t_{i-1}, \tilde{S}_{t_{i-1}}) \Delta \tilde{S}_{t_i}^2 \right\} \\ &\approx \tilde{v}(0, \tilde{S}_0) + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \Delta t_i + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial S} \Delta \tilde{S}_{t_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial S^2} \tilde{S}_{t_{i-1}}^2 \sigma^2 \Delta t_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial S^2} \tilde{S}_{t_{i-1}}^2 \sigma^2 (\Delta W_{t_i}^2 - \Delta t_i) \right\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Le dernier terme,

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial S^2}(t_{i-1}, \tilde{S}_{t_{i-1}}) \tilde{S}_{t_{i-1}}^2 \sigma^2 (\Delta W_{t_i}^2 - \Delta t_i),$$

est d'espérance nulle et de variance égale à

$$\frac{3}{4} \sum_{i=1}^n \mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial S^2}(t_{i-1}, \tilde{S}_{t_{i-1}}) \right)^2 \tilde{S}_{t_{i-1}}^4 \sigma^4 \Delta t_i^2 \right] = O(\max_i \Delta t_i).$$

Il converge donc en L^2 vers 0 lorsque le pas de discrétisation tend vers 0. En supposant que ce pas de discrétisation est petit, on peut donc écrire

$$\tilde{v}(T, \tilde{S}_T) \approx \tilde{v}(0, \tilde{S}_0) + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial S} \Delta \tilde{S}_{t_i} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \Delta t_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial S^2} \tilde{S}_{t_{i-1}}^2 \sigma^2 \Delta t_i \right\}.$$

Pour que cette valeur puisse être répliquée par un portefeuille autofinçant, il faut que sa dynamique corresponde à la dynamique du portefeuille autofinçant

$$\tilde{X}_T = \tilde{X}_0 + \sum_{i=1}^n \delta_{t_{i-1}} \Delta \tilde{S}_{t_i}.$$

Il faut donc faire disparaître les termes en Δt . Pour cela supposons que la fonction \tilde{v} est une solution sur $[0, T] \times (0, \infty)$ de l'EDP

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial S^2} \sigma^2 \tilde{S}^2 = 0. \quad (2.4)$$

Dans ce cas,

$$\tilde{v}(T, \tilde{S}_T) \approx \tilde{v}(0, \tilde{S}_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{v}}{\partial S} \Delta \tilde{S}_{t_i},$$

et en choisissant

$$\delta_{t_i} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial S}(t_i, \tilde{S}_{t_i}), \quad \tilde{X}_0 = \tilde{v}(0, \tilde{S}_0),$$

on a que

$$\tilde{X}_T \approx \tilde{v}(T, \tilde{S}_T).$$

Nous avons donc identifié un portefeuille autofinçant, qui réplique, de manière approché en temps discret et de manière exacte en cas de trading continu, une fonction arbitraire du temps et du sous-jacent, qui vérifie l'EDP (2.4). Mais nous avons le droit également de choisir la condition terminale pour l'EDP. Choisissons alors le pay-off actualisé de l'option comme condition terminale :

$$\tilde{v}(T, \tilde{S}_T) = \tilde{g}(\tilde{S}_T) := \frac{g(S_T^0, \tilde{S}_T)}{S_T^0}.$$

Dans ce cas, $\tilde{X}_T \approx \tilde{g}(\tilde{S}_T)$: nous avons identifié le portefeuille autofinçant qui réplique le pay-off de l'option. Cela implique par l'absence d'arbitrage que la valeur (actualisée) de l'option à toute date doit nécessairement être égale à la valeur du portefeuille de réplication et donc à $\tilde{v}(t, \tilde{S}_t)$.

Avec ce raisonnement à moitié heuristique, mais qui peut être rendu rigoureux en utilisant la formule d'Itô, nous avons obtenu le résultat suivant.

Théorème 4 (EDP de Black-Scholes et portefeuille de réplication, prix actualisés). *Dans le modèle de Black-Scholes, le prix actualisé à la date t d'une option européenne de pay-off actualisé $\tilde{g}(\tilde{S}_T)$ à la date T est donné par $\tilde{v}(t, \tilde{S}_t)$, où la fonction \tilde{v} est la solution sur $[0, T] \times (0, \infty)$ de l'EDP*

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial S^2} \sigma^2 \tilde{S}^2 = 0, \quad \tilde{v}(T, \tilde{S}) = \tilde{g}(\tilde{S}).$$

Cette option peut être répliquée par un portefeuille autofinçant de valeur initiale actualisée $\tilde{X}_0 = \tilde{v}(0, \tilde{S}_0)$, et qui contient à toute date t , $\frac{\partial \tilde{v}(t, \tilde{S}_t)}{\partial S}$ unités de l'actif risqué.

La version de ce résultat pour les prix non-actualisés peut être obtenue immédiatement par un changement de variable.

Corollaire 1 (EDP de Black-Scholes et portefeuille de réplication, prix non actualisés). *Dans le modèle de Black-Scholes, le prix à la date t d'une option européenne de pay-off $g(S_T)$ à la date T est donné par $v(t, S_t)$, où la fonction v est la solution sur $[0, T] \times (0, \infty)$ de l'EDP*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = r \left(v - S \frac{\partial v}{\partial S} \right), \quad v(T, S) = g(S). \quad (2.5)$$

Cette option peut être répliquée par un portefeuille autofinçant de valeur initiale $X_0 = v(0, S_0)$, et qui contient à toute date t , $\frac{\partial v(t, S_t)}{\partial S}$ unités de l'actif risqué.

Pour répliquer une option européenne dans le modèle de Black-Scholes, on peut donc utiliser la procédure suivante :

1. Calculer la fonction de prix $v(t, S)$ de l'option en résolvant l'équation (2.5).
2. Calculer la dérivée $\frac{\partial v}{\partial S}$ pour obtenir le ratio de couverture.

Cette procédure marche si l'EDP (2.5) admet une et unique solution. Le résultat suivant précise ce point et donne un moyen pour calculer la solution.

Théorème 5. *Soit g une fonction à croissance polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe p tel que $|g(x)| \leq C(1+|x|^p)$ pour tout x . Alors l'EDP (2.5) admet l'unique solution dans la classe de fonctions à croissance polynomiale, appartenant à $C^0([0, T] \times (0, \infty)) \cap C^{1,2}([0, T] \times (0, \infty))$ donnée par*

$$v(t, S) = \mathbb{E} \left[e^{-r(T-t)} g(S e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma W_{T-t}}) \right]$$

Démonstration. Nous vérifions seulement que la fonction donnée dans le théorème est bien une solution de l'EDP (2.5). Commençons par un changement de variable :

$$x = \log S + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \quad u(t, x) = e^{r(T-t)} v(t, S).$$

Alors,

$$\frac{\partial v}{\partial S} = \frac{1}{S} e^{-r(T-t)} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} = \frac{1}{S^2} e^{-r(T-t)} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right\}$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial t} = e^{-r(T-t)} \left\{ r u + \frac{\partial u}{\partial t} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} \right\}.$$

Posons enfin $G(x) = g(e^x)$. On en déduit que la fonction v vérifie (2.5) si et seulement si la fonction

$$u(t, x) = \mathbb{E}[G(x + \sigma W_{T-t})]$$

vérifie l'EDP de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(T, x) = G(x).$$

Cette dernière affirmation est facile à vérifier directement : en substituant la forme explicite de la densité de W_{T-t} ,

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} G(x + \sigma z) \frac{e^{-\frac{z^2}{2(T-t)}}}{\sqrt{2\pi(T-t)}} dz = \int_{\mathbb{R}} G(y) \frac{e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2(T-t)}}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} dz.$$

Les dérivées de u sont alors données par

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \int_{\mathbb{R}} G(y) \frac{y-x}{\sigma^2(T-t)} \frac{e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2(T-t)}}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} dz, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \int_{\mathbb{R}} G(y) \left\{ \frac{(y-x)^2}{\sigma^4(T-t)^2} - \frac{1}{\sigma^2(T-t)} \right\} \frac{e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2(T-t)}}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} dz, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= - \int_{\mathbb{R}} G(y) \left\{ \frac{(y-x)^2}{2\sigma^2(T-t)^2} - \frac{1}{2(T-t)} \right\} \frac{e^{-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2(T-t)}}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} dz, \end{aligned}$$

et on voit immédiatement que les termes $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ se compensent. \square

2.4 La formule de Black et Scholes

Théorème 6 (Formule de Black et Scholes). *Le prix d'une option call européen de pay-off $g(S) = (S - K)^+$ dans le modèle de Black-Scholes est donné par*

$$v(t, S) := C_{BS}(t, S) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

où

$$d_{1,2} = \frac{\log \frac{S}{Ke^{-r(T-t)}} \pm \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

et N est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Le ratio de couverture (delta) est donné par

$$\Delta_{BS}(t, S) = \frac{\partial C_{BS}}{\partial S}(t, S) = N(d_1).$$

Démonstration. Par Théorème (5),

$$C_{BS}(t, S) = \mathbb{E} \left[e^{-r(T-t)} \left(Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma W_{T-t}} - K \right)^+ \right] = P_1 - P_2$$

$$\text{avec } P_1 = \mathbb{E} \left[Se^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)+\sigma W_{T-t}} \mathbf{1}_{Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma W_{T-t}} \geq K} \right]$$

$$P_2 = Ke^{-r(T-t)} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma W_{T-t}} \geq K} \right] = Ke^{-r(T-t)} \mathbb{P} \left[Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma W_{T-t}} \geq K \right].$$

On montre alors facilement que

$$P_2 = Ke^{-r(T-t)}N(d_2).$$

Pour P_1 , on a

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{S}{\sqrt{2\pi}} \int_{Se^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma z\sqrt{T-t}} \geq K} e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)+\sigma z\sqrt{T-t}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \frac{S}{\sqrt{2\pi}} \int_{Se^{(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma z\sqrt{T-t}} \geq K} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = SN(d_1). \end{aligned}$$

Pour calculer le ratio de couverture, nous pouvons utiliser le théorème de convergence dominée pour dériver l'expression du prix sous le signe de l'espérance (il

est également possible de dériver directement la formule de Black et Scholes) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{BS}}{\partial S}(t, S) &= \mathbb{E} \left[e^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial S} \left(S e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma W_{T-t}} - K \right)^+ \right] \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t) + \sigma W_{T-t}} \mathbf{1}_{S e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma W_{T-t}} \geq K} \right] = N(d_1). \end{aligned}$$

□

En utilisant la parité call-put, on a le corollaire suivant.

Corollaire 2. *Le prix d'une option put européen de pay-off $g(S) = (K - S)^+$ dans le modèle de Black-Scholes est donné par*

$$v(t, S) := P_{BS}(t, S) = K e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S N(-d_1).$$

Le ratio de couverture (delta du put) est donné par

$$\frac{\partial P_{BS}}{\partial S}(t, S) = N(d_1) - 1.$$

Dans le modèle de Black et Scholes, les calls sont donc croissants et les puts décroissants par rapport au prix du sous-jacent.

2.5 Les grecques

Pour comprendre le comportement des options en fonction de différents paramètres du modèle, on calcule les sensibilités du prix Black-Scholes par rapport à ces paramètres.

- Le *delta* est la sensibilité du prix par rapport à la valeur actuelle de l'actif sous-jacent :

$$\boxed{\frac{\partial C_{BS}}{\partial S} = N(d_1), \quad \frac{\partial P_{BS}}{\partial S} = N(d_1) - 1.}$$

C'est de loin le facteur de risque le plus important affectant le prix d'une option.

- Le *gamma* est défini comme la deuxième dérivée du prix ou bien la dérivée première du delta :

$$\boxed{\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 P_{BS}}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} N(d_1) = \frac{n(d_1)}{S \sigma \sqrt{T-t}}, \quad \text{où } n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = N'(x).}$$

Il a donc la double interprétation de la sensibilité du prix par rapport aux grandes variations et de la vitesse du changement de delta. Puisque le gamma est toujours positif, les prix des calls (et des puts) sont convexes en S . Le gamma d'une option est grand lorsque l'option est proche de la monnaie et / ou proche de l'échéance.

- Le *vega* est la sensibilité par rapport à la volatilité :

$$\boxed{\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} = \frac{\partial P_{BS}}{\partial \sigma} = Sn(d_1)\sqrt{T-t}.}$$

Les prix des calls et des puts sont donc croissants par rapport à la volatilité. Le vega est plus grand à la monnaie mais décroît pour les options qui sont proches de l'échéance. Un portefeuille de n options de prix C_1, \dots, C_n contenant w_i unités de i -ème option est gamma-neutre (respectivement, vega-neutre) si

$$\sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial S^2} = 0 \quad \text{respectivement} \quad \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial C_i}{\partial \sigma} = 0.$$

Dans le modèle de Black-Scholes, *si toutes les options ont la même échéance*, un portefeuille est gamma-neutre si et seulement s'il est vega-neutre.

- Le *rho* est la sensibilité par rapport au taux d'intérêt :

$$\boxed{\frac{\partial C_{BS}}{\partial r} = K(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2) > 0, \quad \frac{\partial P_{BS}}{\partial r} = -K(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2) < 0.}$$

Le call est donc croissant et le put décroissant par rapport au taux d'intérêt.

- Le *theta* mesure la sensibilité par rapport au temps :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial C_{BS}}{\partial t} &= -\frac{Sn(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2) < 0 \\ \frac{\partial P_{BS}}{\partial t} &= -\frac{Sn(d_1)\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}N(-d_2) \end{aligned}}$$

Le theta du call est toujours négatif, mais celui du put peut être négatif ou positif, en fonction des paramètres. Pour les puts proches de la monnaie / proches de l'échéance le premier terme va dominer, donnant un theta négatif, mais pour les puts dans la monnaie c'est le deuxième terme qui risque de l'emporter et le theta sera positif.

2.6 Discrétisation et couverture en gamma

Dans le modèle de Black-Scholes, pour que l'option soit complètement répliquée, le portefeuille de couverture doit être réajusté en continu. En pratique, il est bien entendu réajusté un nombre fini de fois, à des dates discrètes, ce qui conduit à une erreur de couverture (erreur de discrétisation). Figure 2.1 montre deux exemples d'évolution de portefeuille de couverture et de l'option qu'on cherche à répliquer dans le modèle de Black-Scholes avec rebalancement très fréquent (8 fois par jour) du portefeuille de couverture. De façon générale, à la fin de chaque trajectoire, le delta est égale soit à 0 si l'option termine hors de la monnaie soit à 1 si l'option termine dans la monnaie. Figure 2.2 montre l'effet d'une fréquence

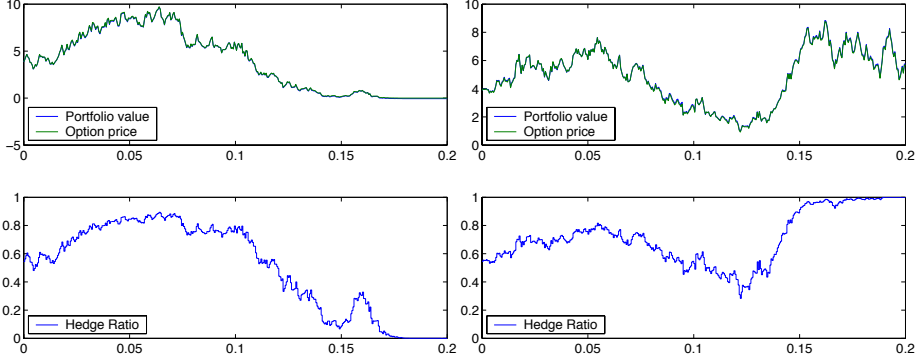


FIGURE 2.1 – Rebalancement continu du portefeuille de couverture (8 fois par jour). Gauche : P&L final = -0.05. Droite : P&L final = 0.08.

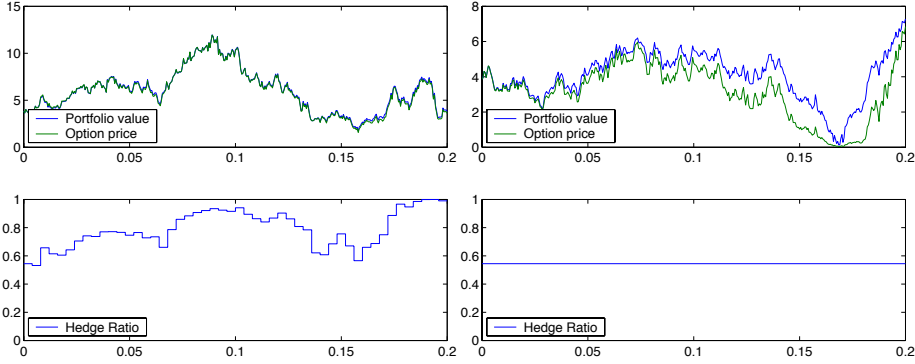


FIGURE 2.2 – Gauche : rebalancement journalier, P&L final = 0.18. Droite : couverture statique en delta, P&L final = 0.44.

de rebalancement moins élevée : à gauche, le portefeuille est recalculé une fois par jour et à droite la couverture reste statique pendant toute la période (2 mois), ce qui conduit à une grande erreur de répliation.

Pour quantifier l'erreur de discrétisation, écrivons la valeur de la différence entre la valeur actualisée d'une option européenne et le portefeuille de couverture correspondant. En utilisant (2.3), on obtient le terme principal de l'erreur

$$\tilde{v}(T, \tilde{S}_T) - \tilde{X}_T \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial S^2} \tilde{S}_{t_{i-1}}^2 \sigma^2 (\Delta W_{t_i}^2 - \Delta t_i),$$

ou bien, avec les quantités non actualisées,

$$v(T, S_T) - X_T \approx \frac{e^{rT}}{2} \sum_{i=1}^n e^{-rt_{i-1}} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} S_{t_{i-1}}^2 \sigma^2 (\Delta W_{t_i}^2 - \Delta t_i),$$

L'accroissement $\Delta W_{t_i}^2 - \Delta t_i$ est d'espérance nulle et de variance

$$\text{Var} [\Delta W_{t_i}^2 - \Delta t_i] = 2\Delta t_i^2.$$

En divisant chaque accroissement par $\sqrt{2\Delta t_i}$, nous obtenons donc des accroissements i.i.d., centrés et de variance Δt_i . Par un théorème de limite centrale fonctionnel (c'est-à-dire qui permet d'obtenir la convergence non pas d'une suite de variables à une gaussienne mais d'une suite de processus vers le mouvement brownien), on obtient alors que

$$\sum_{t_i \leq t} \frac{1}{\sqrt{2\Delta t_i}} (\Delta W_{t_i}^2 - \Delta t_i),$$

en tant qu'un processus paramétré part t , converge en loi vers un mouvement brownien standard W^* indépendant de W , lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro. On peut donc écrire de manière informelle, en supposant que le pas de discrétisation est constant et égal à Δt ,

$$\tilde{v}(T, \tilde{S}_T) - \tilde{X}_T \approx \sqrt{\frac{\Delta t}{2}} \int_0^T \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial S^2} \tilde{S}_t^2 \sigma_t^2 dW_t^*,$$

ou bien

$$v(T, S_T) - X_T \approx \sqrt{\frac{\Delta t}{2}} e^{rT} \int_0^T e^{-rt} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} S_t^2 \sigma_t^2 dW_t^*.$$

L'erreur de couverture due à la discrétisation de la stratégie est donc proportionnelle au gamma de l'option et à la racine du pas de temps. Elle sera plus importante dans lorsque le gamma est élevé, c'est-à-dire, pour les options proches de la monnaie et/ou de l'échéance.

Pour réduire l'erreur de couverture, on peut soit augmenter la fréquence de réajustement, ce qui engendre des coûts de transaction, soit diminuer le gamma, en rajoutant au portefeuille des instruments de couverture adaptés (en général, des options liquides). Ceci n'est pas réaliste pour la couverture d'une seule option mais peut être tout à fait envisageable lorsqu'on souhaite couvrir un portefeuille contenant beaucoup d'options sur le même sous-jacent. Si la valeur du portefeuille d'options à couvrir est notée par $v(t, S)$ et celle de l'actif de couverture par $v_0(t, S)$, pour que le portefeuille global soit gamma-neutre, il faut que la quantité de l'actif v_0 soit égale à

$$\gamma_t = \frac{\frac{\partial^2 v}{\partial S^2}}{\frac{\partial^2 v_0}{\partial S^2}}.$$

On a donc intérêt à choisir l'actif de couverture dont le gamma est élevé.

Robustesse de la formule de Black et Scholes La formule de Black-Scholes est souvent utilisée dans le marché même pour les actifs dont la volatilité n'est pas constante ni même déterministe. Cette pratique est partiellement

justifiée par la propriété connue sous le nom de “robustesse de la formule de Black-Scholes” : même si la vraie volatilité du sous-jacent est stochastique, la formule de Black-Scholes peut être utilisée pour calculer les bornes supérieures / inférieures du prix, pourvu que la volatilité constante utilisée majore / minore la vraie volatilité.

Supposons que le prix d'action suit

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma_t dW_t,$$

où σ_t est un processus stochastique, et que l'agent calcule son portefeuille de couverture en utilisant la formule Black-Scholes avec volatilité constante Σ . L'évolution du portefeuille de l'agent est

$$d\tilde{X}_t = \Delta_{BS}(t, S_t) d\tilde{S}_t, \quad \tilde{X}_0 = \tilde{C}_{BS}(0, \tilde{S}_0).$$

L'erreur finale actualisée de couverture est donnée par la différence entre V_T et le payoff de l'option :

$$\tilde{\varepsilon}_T = \tilde{X}_T - \tilde{g}(\tilde{S}_T) = \tilde{X}_T - \tilde{C}_{BS}(T, \tilde{S}_T).$$

En appliquant la formule d'Itô on a alors

$$d\tilde{C}_{BS}(t, S_t) = \left(\frac{\partial \tilde{C}_{BS}}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{C}_{BS}}{\partial S^2} \sigma_t^2 \tilde{S}_t^2 \right) dt + \Delta_{BS}(t, S_t) dS_t,$$

mais $\tilde{C}_{BS}(t, S)$ en tant qu'une fonction satisfait l'EDP de Black-Scholes :

$$\frac{\partial \tilde{C}_{BS}}{\partial t} + \frac{1}{2} \Sigma^2 \tilde{S}^2 \frac{\partial^2 \tilde{C}_{BS}}{\partial S^2} = 0.$$

En rassemblant les trois équations, on trouve

$$\tilde{\varepsilon}_T = \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\partial^2 \tilde{C}_{BS}}{\partial S^2} (\Sigma^2 - \sigma_t^2) \tilde{S}_t^2 dt.$$

ou bien

$$\varepsilon_T = X_T - g(S_T) = \frac{1}{2} e^{rT} \int_0^T e^{-rt} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial S^2} (\Sigma^2 - \sigma_t^2) S_t^2 dt.$$

Si $\Sigma \geq \sigma_t$ p.s., nous avons $X_T \geq g(S_T)$ p.s. : le portefeuille de couverture Black-Scholes domine le prix de l'option et donc, le prix Black-Scholes domine le vrai prix. Dans ce sens précis, la formule de Black-Scholes est robuste aux misspécifications de la volatilité.

2.7 Volatilité implicite

Dans le modèle de Black et Scholes l'unique paramètre inobservable est la volatilité. La fonction, $\sigma \mapsto C_{BS}(\sigma)$ qui à une valeur de volatilité associe le prix Black-Scholes correspondant, vérifie

$$\lim_{\sigma \downarrow 0} C_{BS}(\sigma) = (S - Ke^{-r(T-t)})^+ \quad \lim_{\sigma \uparrow \infty} C_{BS}(\sigma) = S \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma} = Sn(d_1)\sqrt{T-t} > 0. \quad (2.7)$$

Ceci implique que l'équation $C_{BS}(\sigma) = C$ a une unique solution pour toute valeur de C vérifiant les contraintes d'arbitrage

$$(S - Ke^{-r(T-t)})^+ < C < S$$

Cette solution peut facilement être calculée en utilisant l'algorithme de bisection pour la fonction $x \in (0, 1) \mapsto C_{BS}\left(\frac{x}{1-x}\right)$ (le changement de variable permet de se ramener à un intervalle borné).

Algorithm 1 $\sigma = \text{Volatilité Implicite}(C)$

```

 $x_0 = 0$ 
 $y_0 = 1$ 
for  $i = 1 \rightarrow N$  do
   $z_i := \frac{1}{2}(x_{i-1} + y_{i-1})$ 
  if  $C > C_{BS}\left(\frac{z_i}{1-z_i}\right)$  then
     $x_i := z_i$ 
  else
     $y_i := z_i$ 
  end if
end for
 $z := \frac{x_N + y_N}{2}$ 
 $\sigma := \frac{z}{1-z}$ 

```

Le choix du nombre d'itérations N dépend de la précision souhaitée : par exemple, $N = 20$ donnera une précision de l'ordre de 10^{-6} . La convergence peut être accélérée par l'algorithme de Newton

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \frac{C - C_{BS}(\sigma_n)}{\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(\sigma_n)},$$

pour lequel 3 – 4 itérations sont normalement suffisantes. Cependant, lorsque C est trop proche des bornes d'arbitrage, la dérivée $\frac{\partial C_{BS}}{\partial \sigma}(\sigma_n)$ devient trop petite, ce qui peut conduire à des instabilités numériques. Dans ce cas il est préférable d'utiliser la méthode de bisection.

La solution $I(C)$ de l'équation $C_{BS}(\sigma) = C$, où C est le prix d'une option européenne observé sur le marché s'appelle la *volatilité implicite* de cette option.

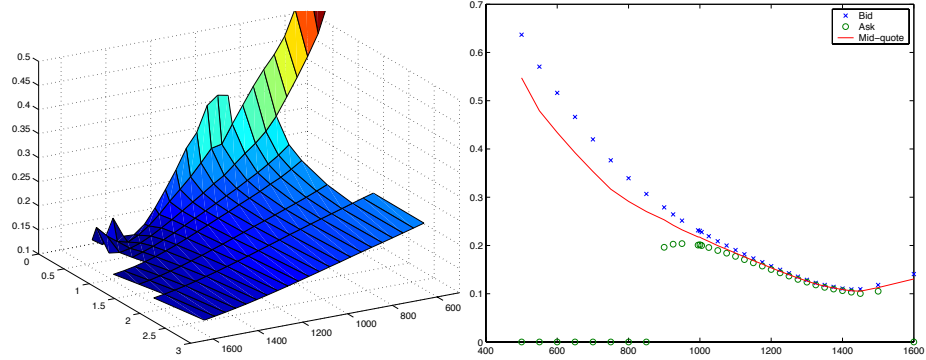
Le modèle de Black-Scholes implique que la volatilité implicite de toutes les options sur le même sous-jacent doit être la même, et égale à la volatilité historique (écart type des rendements annualisé) du sous-jacent. Cependant, lorsqu'on calcule I à partir de prix de différentes options observés sur le marché, on constate que

- La volatilité implicite est toujours supérieure à la volatilité du sous-jacent.
- Les volatilités implicites de différentes options sur le même sous-jacent dépendent de leur strikes et maturités.

Le graphique gauche du fig. 2.7 trace les volatilités implicites des options sur l'indice S&P 500 en fonction de leur strike et maturité observés le 23 janvier 2006. On constate que

- Pour presque tous les strikes, la volatilité implicite décroît en fonction de strike (phénomène de *skew*).
- Pour des très grands strikes on observe parfois une légère remontée de la volatilité implicite (phénomène du *smile*).
- Les phénomènes de smile et skew sont le plus prononcés pour les options de courte maturité ; la courbe de volatilité implicite en fonction de strike s'aplatit pour les grandes maturités.

La différence entre la volatilité implicite et la volatilité historique du sous-jacent peut s'expliquer par le fait que la couverture d'une option est plus chère en réalité que dans le modèle de Black-Scholes, à cause, en particulier, des frais de transaction et de la nécessité de couvrir les sources de risque non pris en compte par ce modèle (e.g. le risque de volatilité). Le phénomène de skew est dû au fait que le modèle de Black-Scholes sous-estime la probabilité d'un krach boursier ou d'un grand mouvement de prix en général. Les traders corrigent cette probabilité en augmentant les volatilités implicites des options loin de la monnaie. Finalement, le smile peut être expliqué par les primes de liquidité qui sont plus élevées pour les options loin de la monnaie. Le graphique droit du fig. 2.7 montre que les volatilités implicites des options loin de la monnaie sont presque exclusivement expliquées par les prix Bid (d'achat) qui ont des primes plus élevées pour ces options à cause d'une offre moins importante.



Chapitre 3

Valorisation d'options exotiques

- *Modèle de Black-Scholes-Samuelson multidimensionnel.*
- *Dynamique d'un portefeuille autofinçant contenant plusieurs actifs risqués. Représentation des stratégies de portefeuille en termes du nombre d'unités de chaque actif, du montant investi dans chaque actif, et de la proportion de la richesse totale investie dans chaque actif.*
- *Stratégies admissibles, absence d'opportunité d'arbitrage, primes de risque.*
- *Formule de valorisation risque-neutre des actifs contingents.*
- *Formule de Black-Scholes avec volatilité et taux d'intérêt déterministes dépendants du temps.*
- *Méthode de changement de numéraire. Transformation des volatilités par changement de numéraire.*
- *Mesure martingale associée au numéraire ; formule de changement de mesure martingale par changement de numéraire.*
- *Formule de Black-Scholes généralisée.*
- *Valorisation d'une option quanto.*
- *Probabilité forward-neutre.*
- *Options à barrière : valorisation par réplication dynamique.*
- *Options à barrière : valorisation des options Regular par réplication statique.*
- *Réplication d'une option Européenne quelconque par des calls et puts.*
- *Swap de variance : réplication statique.*

3.1 Evaluation risque-neutre

Modèle de Black-Scholes multidimensionnel Dans cette section nous introduisons un modèle du marché plus général que celui de la section 2.1, fondé

sur le calcul stochastique et applicable aux options exotiques ainsi qu'aux options sur plusieurs sous-jacents.

Soit $W = (W_t^1, \dots, W_t^d)_{t \geq 0}^\perp$ un mouvement brownien standard sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sa filtration naturelle complétée par les ensembles de mesure nulle. Nous considérons un marché financier composé d'un actif sans risque dont la valeur à toute date t est donnée par

$$S_t^0 = \exp\left(\int_0^t r(u) du\right), \quad (3.1)$$

où le taux d'intérêt r est supposé déterministe, et de d actifs risqués dont les valeurs vérifient

$$S_t^i = S_0^i \exp\left(\int_0^t \left(b^i(u) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d |\sigma^{ij}(t)|^2\right) dt + \int_0^t \sum_{j=1}^d \sigma^{ij}(t) dW_t^j\right), \quad i = 1, \dots, d.$$

Les fonctions r , b et σ sont des fonctions déterministes qui vérifient

$$\int_0^T (\|r(t)\| + \|b(t)\| + \|\sigma(t)\|^2) dt < \infty.$$

De plus, on suppose que la matrice $\sigma(t)$ est inversible pour tout t .

Par application de la formule d'Itô,

$$dS_t^i = S_t^i \left(b^i(t) dt + \sum_{j=1}^d \sigma^{ij}(t) dW_t^j \right),$$

ou avec des notations matricielles,

$$dS_t = \text{diag}[S_t] (b(t) dt + \sigma(t) dW_t), \quad (3.2)$$

où $S_t = (S_t^1, \dots, S_t^d)^\perp$, $b(t) = (b^1(t), \dots, b^d(t))^\perp$ et $\text{diag}[S_t]$ est la matrice ayant les éléments du vecteur S_t sur la diagonale principale et zéros partout ailleurs.

Introduisons le vecteur des *primes de risque* :

$$\lambda(t) = \sigma(t)^{-1} (b(t) - r(t)\mathbf{1}),$$

où $\mathbf{1}$ est un vecteur colonne d -dimensionnel dont tous les éléments sont égaux à 1. Cela permet d'écrire

$$dS_t = \text{diag}[S_t] \{r(t)\mathbf{1} dt + \sigma(t)(\lambda(t) dt + dW_t)\}.$$

L'actualisation simplifie considérablement les développements qui vont suivre :

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{S_t^0} = S_t e^{-\int_0^t r(s) ds},$$

et on a alors

$$d\tilde{S}_t = \text{diag}[\tilde{S}_t]\sigma(t)(\lambda(t)dt + dW_t).$$

Stratégies de portefeuille Une stratégie de portefeuille détermine les positions de l'investisseur dans chaque actif à toute date. Cette stratégie peut être exprimée de manière équivalente en termes de *quantités* des actifs risqués à acheter $\delta_t = (\delta_t^1, \dots, \delta_t^d) \in \mathbb{R}^d$, en termes de *montants* à investir dans chaque actif risqué $\pi_t = (\pi_t^1, \dots, \pi_t^d) \in \mathbb{R}^d$ ou bien, si la valeur du portefeuille notée par X_t est positive à toute date, en termes de *proportions* de la richesse totale à investir dans chaque actif risqué $\omega_t = (\omega_t^1, \dots, \omega_t^d) \in \mathbb{R}^d$. Ces coefficients sont reliés entre eux par les relations suivantes :

$$\pi_t^i = \delta_t^i S_t^i \quad \text{et} \quad w_t^i = \frac{\delta_t^i S_t^i}{X_t}, \quad i = 1, \dots, d.$$

Le montant investi en l'actif sans risque est donné par

$$X_t - \sum_{i=1}^d \delta_t^i S_t^i = X_t - \sum_{i=1}^d \pi_t^i = X_t \left(1 - \sum_{i=1}^d w_t^i \right)$$

L'équation d'autofinancement exprime le fait que aucun montant n'est retiré ni injecté dans le portefeuille. Pour les différentes représentations de la stratégie, elle s'écrit de manières suivantes :

– En termes de quantites :

$$dX_t = \sum_{i=1}^d \delta_t^i dS_t^i + \left(X_t - \sum_{i=1}^d \delta_t^i S_t^i \right) \frac{dS_t^0}{S_t^0}.$$

– En termes de montants :

$$dX_t = \sum_{i=1}^d \pi_t^i \frac{dS_t^i}{S_t^i} + \left(X_t - \sum_{i=1}^d \pi_t^i \right) \frac{dS_t^0}{S_t^0}. \quad (3.3)$$

– En termes de proportions :

$$\frac{dX_t}{X_t} = \sum_{i=1}^d \omega_t^i \frac{dS_t^i}{S_t^i} + \left(1 - \sum_{i=1}^d \omega_t^i \right) \frac{dS_t^0}{S_t^0}.$$

Dans ce chapitre on va essentiellement représenter les stratégies de portefeuille en termes de *montants* investis en chaque actif risqué. Une stratégie de portefeuille est donc un couple $(x, (\pi_t)_{0 \leq t \leq T})$, où x est la valeur initiale et $\pi_t = (\pi_t^1, \dots, \pi_t^d) \in \mathbb{R}^d$ (vecteur ligne) représente le montant à investir dans chaque actif risqué à la date t , et la dynamique du portefeuille autofinçant est déterminée par l'équation (3.3). En passant aux valeurs actualisées, cette

équation se simplifie :

$$d\tilde{X}_t = \tilde{\pi}_t \text{diag}[\tilde{S}_t]^{-1} d\tilde{S}_t = \tilde{\pi}_t \sigma(t) \{ \lambda(t) dt + dW_t \}.$$

Dans la suite, on notera par $X_t^{x,\pi}$ la valeur du portefeuille autofinçant de valeur initiale x et géré avec la stratégie π .

En supposant que

$$\int_0^T \|\lambda(t)\|^2 dt < \infty,$$

on obtient par théorème de Cameron-Martin-Girsanov que sous la probabilité \mathbb{Q} définie par

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \exp \left(- \int_0^T \lambda(t) dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \|\lambda(t)\|^2 dt \right),$$

le processus

$$\widehat{W}_t = \int_0^t \lambda(s) ds + W_t$$

est un mouvement brownien. On peut alors écrire

$$\tilde{X}_t^{x,\pi} = x + \int_0^t \tilde{\pi}_u \sigma(u) d\widehat{W}_u. \quad (3.4)$$

Définition 2. La stratégie de portefeuille $(x, (\pi_t)_{0 \leq t \leq T})$ est admissible si l'intégrale (3.4) est bien défini, ce qui est le cas si

$$\int_0^T \|\tilde{\pi}_u \sigma(u)\|^2 du < \infty \quad \text{p.s.},$$

et si la valeur de portefeuille vérifie

$$\inf_{0 \leq t \leq T} \tilde{X}_t^{x,\pi} \geq C, \quad (3.5)$$

où C est une constante qui peut dépendre de π .

Dans la suite, on notera par \mathcal{A} l'ensemble des portefeuilles admissibles.

Portefeuilles admissibles et absence d'arbitrage

Définition 3 (Absence d'opportunité d'arbitrage). On dit que le marché n'admet pas d'opportunité d'arbitrage si, pour tout portefeuille admissible de la forme $(0, \pi)$,

$$X_T^{0,\pi} \geq 0 \quad \text{p.s.} \quad \Rightarrow \quad X_T^{0,\pi} = 0 \quad \text{p.s.}$$

La condition (3.5) est nécessaire en temps continu pour éviter des arbitrages de type “stratégie de doublement de la mise”. Pour décrire une telle stratégie, supposons que le cours du sous-jacent est modélisé par un mouvement brownien standard : $S_t = W_t$, et que le taux d’intérêt est nul sur le marché. La stratégie consiste à détenir $2^{n/2}$ unités de l’actif risqué sur l’intervalle de temps $(t_{k-1}, t_k]$, où l’on pose $t_k = 1 - \frac{1}{2^k}$. La valeur du portefeuille à l’instant t_n est alors donnée par

$$X_{t_n} = \sum_{k=1}^n 2^{k/2} (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}) = \sum_{k=1}^n Z_k,$$

où $(Z_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables i.i.d. de loi normale centrée réduite. $(X_{t_n})_{n \geq 1}$ est alors une marche aléatoire gaussienne, qui vérifie

$$\inf\{n : X_{t_n} \geq K\} < \infty \quad \text{p.s.} \quad \forall K.$$

Il est donc possible de réaliser un gain arbitrairement grand, en un temps fini (sur l’intervalle de temps $[0, 1]$). Cependant, cette stratégie n’est pas admissible au sens de la définition 2. En pratique, avant d’atteindre la valeur K , le portefeuille peut prendre des valeurs négatives arbitrairement grandes.

Théorème 7. *Le marché financier défini par (3.1), (3.2) et (3.4), avec les stratégies admissibles données par Définition 2, n’admet pas d’opportunité d’arbitrage.*

Démonstration. Soit $(0, \pi)$ une stratégie admissible telle que $X_T^{0, \pi} \geq 0$ p.s. On pose

$$\tau_n = \inf \left\{ t : \int_0^t \|\tilde{\pi}_u \sigma(u)\|^2 du \geq n \right\} \wedge T.$$

Alors, (τ_n) est une suite des temps d’arrêt qui converge p.s. vers T et

$$\mathbb{E}^Q \left[\int_0^{\tau_n} \|\tilde{\pi}_u \sigma(u)\|^2 du \right] \leq n < \infty,$$

ce qui implique que

$$\mathbb{E}^Q[\tilde{X}_{\tau_n}^{0, \pi}] = 0.$$

pour tout n . Mais par le lemme de Fatou, puisque $\tilde{X}_{\tau_n}^{0, \pi}$ est borné inférieurement, on a :

$$\mathbb{E}^Q[\tilde{X}_T^{0, \pi}] = \mathbb{E}^Q[\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{X}_{\tau_n}^{0, \pi}] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^Q[\tilde{X}_{\tau_n}^{0, \pi}] = 0,$$

ce qui implique que $X_T^{0, \pi} = 0$ p.s. □

Remarque 1. Avec la condition de la ligne de crédit finie (3.5), la condition d’existence des primes de risque

$$b(t) = r(t)\mathbf{1} + \sigma(t)\lambda(t)$$

est nécessaire est suffisante pour l'absence d'arbitrage même si le nombre de facteurs de risque (browniens) ne coïncide pas avec le nombre d'actifs risqués. S'il y a plus d'actifs que de facteurs de risque, cette condition donne des contraintes sur les rendements des actifs (voir l'exercice à la fin de ce chapitre). Si le nombre de facteurs est supérieur au nombre d'actifs, il y a plusieurs primes de risque possibles et donc plusieurs probabilités risque-neutres.

Evaluation des actifs contingents Introduisons l'ensemble des actifs atteignables :

$$\mathcal{B} = \{G \in L^2(\mathcal{F}_T) : \exists(x, \pi) \in \mathcal{A} : X_T^{x, \pi} = G\}.$$

Théorème 8. Soit $G \in \mathcal{B}$. Alors à tout instant $t \leq T$, le prix de non-arbitrage de G est donné par

$$V_t(G) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} G \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Démonstration. Soit (x, π) la stratégie de portefeuille qui réplique G . Puisque $G \in L^2(\mathcal{F}_T)$, $(\tilde{X}_t^{x, \pi})$ est une \mathbb{Q} -martingale de carré intégrable, et donc

$$\tilde{X}_t^{x, \pi} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} G \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

□

Définition 4. Le marché est dit complet si tous les actifs dans $L^2(\mathcal{F}_T)$ sont atteignables.

Théorème 9. Le marché financier défini par (3.1), (3.2) et (3.4), avec les stratégies admissibles données par Définition 2 est complet.

Ce résultat est une conséquence du théorème de représentation des martingales dans la filtration brownienne : pour tout $G \in L^2(\mathcal{F}_T)$, il existe un unique processus adapté H avec

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T H_s^2 ds \right] < \infty \quad \text{et} \quad G = \mathbb{E}[G] + \int_0^T H_s dW_s.$$

Les implications pratiques des développements de cette section peuvent être résumées comme suit :

Valorisation d'actifs contingents dans le modèle de Black et Scholes

Dans le modèle de Black et Scholes généralisé, défini par équations (3.1) et (3.2), l'unique prix de non-arbitrage d'une option de pay-off $G \in L^2(\mathcal{F}_T)$ à l'instant T est donné par

$$V_t(G) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} G \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

où \mathbb{Q} est la probabilité risque-neutre, c'est-à-dire, une probabilité telle que les actifs risqués vérifient

$$dS_t = \text{diag}[S_t](r(t)\mathbf{1}dt + \sigma(t)d\widehat{W}_t),$$

où \widehat{W} est un \mathbb{Q} -mouvement brownien.

Retour sur la formule de Black et Scholes Supposons que le nombre d'actifs risqués est égal à $d = 1$, et le pay-off G est une fonction déterministe de la valeur finale du sous-jacent : $G = g(S_T)$. Dans ce cas, la formule de pricing devient

$$\begin{aligned} V_t(G) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} g(S_T) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} g \left(S_t e^{\int_t^T \left(r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_t^T \sigma(s) d\widehat{W}_s} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] := v(t, S_t), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} v(t, S) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} g \left(S e^{\int_t^T \left(r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_t^T \sigma(s) d\widehat{W}_s} \right) \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-(T-t)\bar{r}} g \left(S e^{\left(\bar{r} - \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \right) (T-t) + \bar{\sigma} \widehat{W}_{T-t}} \right) \right], \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\bar{r} := \frac{1}{T-t} \int_t^T r(s)ds \quad \text{et} \quad \bar{\sigma}^2 = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma^2(s)ds. \quad (3.6)$$

Dans le cas d'une option Call, on a $g(S) = (S - K)^+$ et

$$\begin{aligned} V_t(G) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} (S_T - K)^+ \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{\int_0^t r(s)ds} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[Z_T \mathbf{1}_{S_T \geq K} \middle| \mathcal{F}_t \right] - K e^{-\int_t^T r(s)ds} \mathbb{Q}[S_T \geq K | \mathcal{F}_t] \end{aligned}$$

avec

$$Z_T = e^{-\int_0^T \frac{\sigma^2(s)}{2} ds + \int_0^T \sigma(s) d\widehat{W}_s}.$$

Introduisons une nouvelle probabilité $\tilde{\mathbb{Q}}$ via

$$\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} \bigg|_{\mathcal{F}_T} = Z_T.$$

On a alors

$$\pi_t(G) = S_t \tilde{\mathbb{Q}}[S_T \geq K | \mathcal{F}_t] - K e^{-\int_t^T r(s)ds} \mathbb{Q}[S_T \geq K | \mathcal{F}_t].$$

De plus,

$$\widetilde{W}_t = \widehat{W}_t - \int_0^t \sigma(s)ds$$

est un mouvement Brownien sous $\tilde{\mathbb{Q}}$, et donc

$$\begin{aligned}
V_t(G) &= S_t \tilde{\mathbb{Q}} \left[S_t e^{\int_t^T \left(r(s) + \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_t^T \sigma(s) d\tilde{W}_s} \geq K \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&\quad - K e^{-\int_t^T r(s) ds} \mathbb{Q} \left[S_t e^{\int_t^T \left(r(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_t^T \sigma(s) d\tilde{W}_s} \geq K \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= S_t \tilde{\mathbb{Q}} \left[S_t e^{\left(\bar{r} + \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \right) (T-t) + \bar{\sigma} (\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)} \geq K \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&\quad - K e^{-\bar{r}(T-t)} \mathbb{Q} \left[S_t e^{\left(\bar{r} - \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \right) (T-t) + \bar{\sigma} (\tilde{W}_T - \tilde{W}_t)} \geq K \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= S_t N(d_1) - K e^{-\bar{r}(T-t)} N(d_2)
\end{aligned}$$

avec

$$d_{12} = \frac{\log \frac{S_t}{K e^{-\bar{r}(T-t)}} \pm \frac{\bar{\sigma}^2 (T-t)}{2}}{\bar{\sigma} \sqrt{T-t}}.$$

En conclusion, on a obtenu le résultat suivant, qui généralise la formule de Black-Scholes classique :

Le prix d'une option Call dans le modèle de Black-Scholes avec volatilité et taux d'intérêt déterministes dépendants du temps est donné par

$$C_{BS}(t, S) = S_t N(d_1) - K e^{-\bar{r}(T-t)} N(d_2),$$

où les coefficients d_{12} sont donnés ci-dessus, et \bar{r} et $\bar{\sigma}$ sont, respectivement, le taux d'intérêt et la volatilité moyennes, définis dans (3.6).

3.2 Changement de numéraire

Dans cette section on verra que la valorisation de certaines options peut être largement simplifiée, en exprimant les prix de tous les actifs, et la valeur du portefeuille en unités d'un actif de référence, appelé *numéraire*. Tout actif ou portefeuille dont la valeur reste strictement positive à toute date peut être choisi comme numéraire. Les exemples les plus utiles sont les devises étrangères, le portefeuille du marché, l'actif sans risque (l'actualisation revient à utiliser l'actif sans risque comme numéraire) ou le zéro-coupon.

Dans cette section, nous n'allons pas systématiquement choisir l'actif sans risque comme numéraire, et il ne jouera pas de rôle particulier. Pour rendre le modèle plus symétrique, on écrira alors $S_t = (S_t^0, \dots, S_t^d)^\perp$ avec

$$dS_t^i = S_t^i \left(b^i(t) dt + \sum_{j=1}^d \sigma^{ij}(t) dW_t^j \right), \quad i = 0, \dots, d,$$

où l'on pose $b^0(t) = r(t)$ et $\sigma^{0j}(t) = 0$. La valeur et la dynamique d'un portefeuille autofinçant (en termes de quantités) s'écrivent alors

$$X_t = \sum_{i=0}^d \delta_t^i S_t^i, \quad dX_t = \sum_{i=0}^d \delta_t^i dS_t^i.$$

Pour un portefeuille ou un actif X et un numéraire Y , nous noterons parfois la valeur de X exprimée en numéraire Y par $X_t^Y := \frac{X_t}{Y_t}$.

Le résultat suivant montre que les notions de base de mathématiques financières ne dépendent pas du choix de numéraire.

Théorème 10.

- i. La notion de portefeuille autofinçant est invariante par changement de numéraire.*
- ii. Une stratégie qui est un arbitrage dans un numéraire est un arbitrage dans tout autre numéraire.*

Démonstration. Pour la première partie, supposons que la dynamique du numéraire $(Y_t)_{t \geq 0}$ est donnée (sous forme matricielle) par

$$dY_t = Y_t (b^Y(t)dt + \gamma^Y(t)dW_t).$$

En appliquant la formule d'Itô à la fonction $f(x, y) = \frac{x}{y}$, on trouve

$$\begin{aligned} d\left(\frac{X_t}{Y_t}\right) &= \frac{dX_t}{Y_t} - \frac{X_t}{Y_t^2} dY_t + \frac{X_t}{Y_t^3} d\langle Y \rangle_t - \frac{d\langle X, Y \rangle_t}{Y_t^2} \\ &= \sum_{i=0}^d \delta_i \left\{ \frac{dS_t^i}{Y_t} - \frac{S_t^i}{Y_t^2} dY_t + \frac{S_t^i}{Y_t^3} d\langle Y \rangle_t - \frac{d\langle S^i, Y \rangle_t}{Y_t^2} \right\} = \sum_{i=0}^d \delta_i^i d\left(\frac{S_t^i}{Y_t}\right). \end{aligned}$$

La deuxième partie est immédiate. \square

Changement de numéraire et volatilités Supposons que la dynamique de l'actif X (en euros, avec les notations vectorielles) est

$$dX_t = X_t \{r(t)dt + \gamma^X(t)(\lambda(t)dt + dW_t)\}$$

et la dynamique du numéraire Y est

$$dY_t = Y_t \{r(t)dt + \gamma^Y(t)(\lambda(t)dt + dW_t)\}.$$

On peut alors exprimer la dynamique de X dans le numéraire Y à l'aide de la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} dX_t^Y &= \frac{dX_t}{Y_t} - \frac{X_t}{Y_t^2} dY_t + \frac{X_t}{Y_t^3} d\langle Y \rangle_t - \frac{d\langle X, Y \rangle_t}{Y_t^2} \\ &= X_t^Y \{(\gamma^X(t) - \gamma^Y(t))(\lambda(t)dt + dW_t) + \gamma^Y(t)\gamma^Y(t)^\perp dt - \gamma^X(t)\gamma^X(t)^\perp dt\} \\ &= X_t^Y (\gamma^X(t) - \gamma^Y(t)) \{(\lambda(t) - \gamma^Y(t)^\perp)dt + dW_t\}. \end{aligned}$$

Dans le nouveau numéraire, la volatilité (vectorielle) de X est donnée par $\gamma^X(t) - \gamma^Y(t)$, et le vecteur des primes de risque devient $\lambda(t) - \gamma^Y(t)^\perp$.

Exemple 3. Le vecteur de volatilité $\gamma^X(t)$ contient les coefficients devant les mouvements browniens indépendants W^1, \dots, W^d dans la dynamique de X . La volatilité scalaire de X (écart type des rendements) est donnée par la norme euclidienne du vecteur de volatilité : $\sigma^X(t) = \|\gamma^X(t)\|$.

Supposons que la dynamique de X et Y est

$$dX_t = X_t \{b^X(t)dt + \sigma^X(t)dW_t^X\} \quad \text{et} \quad dY_t = Y_t \{b^Y(t)dt + \sigma^Y(t)dW_t^Y\},$$

où W^X et W^Y sont des mouvements browniens unidimensionnels tels que

$$d\langle W^X, W^Y \rangle = \rho dt.$$

Nous pouvons alors exprimer la dynamique de X et Y à l'aide de deux mouvements browniens indépendants \widehat{W}^1 et \widehat{W}^2 :

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t \{b^X(t)dt + \sigma^X(t)d\widehat{W}_t^1\} \\ dY_t &= Y_t \{b^Y(t)dt + \sigma^Y(t)(\rho d\widehat{W}_t^1 + \sqrt{1-\rho^2}d\widehat{W}_t^2)\}. \end{aligned}$$

On en déduit une représentation vectorielle :

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t \{b^X(t)dt + \gamma^X(t)d\widehat{W}_t\}, & \gamma^X(t) &= (\sigma^X(t), 0), \\ dY_t &= Y_t \{b^Y(t)dt + \gamma^Y(t)d\widehat{W}_t\}, & \gamma^Y(t) &= (\sigma^Y(t)\rho, \sigma^Y(t)\sqrt{1-\rho^2}). \end{aligned}$$

La volatilité (scalaire) de X dans le numéraire Y est donc donnée par

$$\begin{aligned} \|\gamma^X(t) - \gamma^Y(t)\| &= \sqrt{(\sigma^X(t) - \rho\sigma^Y(t))^2 + (1-\rho^2)\sigma^Y(t)^2} \\ &= \sqrt{\sigma^X(t)^2 + \sigma^Y(t)^2 - 2\rho\sigma^X(t)\sigma^Y(t)}. \end{aligned}$$

Changement de numéraire et changement de probabilité Soit Y un numéraire. On dit qu'une mesure de probabilité \mathbb{Q}^Y est une mesure martingale associée à Y si pour chaque actif X tel que $\frac{X}{Y}$ est intégrable, le ratio $\frac{X}{Y}$ est une \mathbb{Q}^Y -martingale. Par exemple, la probabilité risque-neutre est associée au numéraire $Y_t = e^{\int_0^t r(s)ds}$ (actif sans risque).

Théorème 11. Soit Y et Z deux numéraires et \mathbb{Q}^Y une mesure martingale associée à Y . Alors la mesure de probabilité \mathbb{Q}^Z définie par

$$\left. \frac{d\mathbb{Q}^Z}{d\mathbb{Q}^Y} \right|_{\mathcal{F}_T} = \frac{Z_T^Y}{Z_0^Y} = \frac{Z_T}{Z_0} \frac{Y_0}{Y_T}.$$

est une mesure martingale associée à Z .

Lemme 1. Soit \mathbb{Q} une probabilité équivalente à \mathbb{P} et $D_t = \mathbb{E} \left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \middle| \mathcal{F}_t \right]$. Alors

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = \frac{1}{D_s} \mathbb{E}[D_t X_t | \mathcal{F}_s].$$

Preuve du lemme. Il faut montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}_s$,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{D_s} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[D_t X_t | \mathcal{F}_s] \mathbf{1}_A \right]$$

Mais la partie droite de cette égalité vérifie

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{D_s} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[D_t X_t | \mathcal{F}_s] \mathbf{1}_A \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[D_t X_t | \mathcal{F}_s] \mathbf{1}_A \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[D_t X_t \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t \mathbf{1}_A].$$

□

Preuve du théorème. Il faut montrer que pour tout actif X , $X^Z = \frac{X}{Z}$ est \mathbb{Q}^Z -martingale. Calculons la densité du changement de probabilité

$$D_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^Y} \left[\frac{Z_T^Y}{Z_0^Y} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{Z_t^Y}{Z_0^Y}.$$

On montre alors la propriété de martingale de X^Z sous \mathbb{Q}^Z :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^Z} \left[\frac{X_t}{Z_t} \middle| \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^Y} \left[\frac{X_t}{Z_t} \frac{Z_t}{Y_t} \frac{Y_t}{Z_s} \middle| \mathcal{F}_s \right] = \frac{X_s}{Z_s}.$$

□

Formule de Black-Scholes généralisée On considère une option d'échanger le flux F^1 contre le flux F^2 à la date T . On suppose que pour les flux F^1 et F^2 il existent des portefeuilles de réplcation, dont les valeurs seront notées par F_t^1 et F_t^2 , qui sont *lognormaux*, de volatilités (vectorielles) $\gamma^1(t)$ et $\gamma^2(t)$, c'est-à-dire qu'ils ont les dynamiques

$$\frac{dF_t^1}{F_t^1} = b^1(t)dt + \gamma^1(t)dW_t, \quad \frac{dF_t^2}{F_t^2} = b^2(t)dt + \gamma^2(t)dW_t$$

Nous noterons par \mathbb{Q}^1 et \mathbb{Q}^2 les mesures martingales associées, respectivement, aux numéraires F^1 et F^2 . On a alors :

$$\frac{d\mathbb{Q}^1}{d\mathbb{Q}} = \frac{F_T^1}{F_0^1} e^{-\int_0^T r(s)ds} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbb{Q}^2}{d\mathbb{Q}} = \frac{F_T^2}{F_0^2} e^{-\int_0^T r(s)ds}.$$

Le prix de l'option d'échange peut alors être exprimé de manière suivante.

$$\begin{aligned}
V_t &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r(s)ds}(F_T^1 - F_T^2)^+ | \mathcal{F}_t] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r(s)ds} F_T^1 \mathbf{1}_{F_T^1 \geq F_T^2} | \mathcal{F}_t] - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r(s)ds} F_T^2 \mathbf{1}_{F_T^1 \geq F_T^2} | \mathcal{F}_t] \\
&= F_t^1 \mathbb{Q}^1[F_T^1 \geq F_T^2 | \mathcal{F}_t] - F_t^2 \mathbb{Q}^2[F_T^1 \geq F_T^2 | \mathcal{F}_t] \\
&= F_t^1 \mathbb{Q}^1 \left[\frac{F_T^2}{F_T^1} \leq 1 | \mathcal{F}_t \right] - F_t^2 \mathbb{Q}^2 \left[\frac{F_T^1}{F_T^2} \geq 1 | \mathcal{F}_t \right] \\
&= F_t^1 N \left(\frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} + \frac{1}{2} Var_t^T}{\sqrt{Var_t^T}} \right) - F_t^2 N \left(\frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} - \frac{1}{2} Var_t^T}{\sqrt{Var_t^T}} \right), \quad (3.7)
\end{aligned}$$

où $Var_t^T = \int_t^T \|\gamma^1(s) - \gamma^2(s)\|^2 ds$, puisque $\frac{F_t^2}{F_t^1}$ est une martingale lognormale de volatilité $\gamma^1(t) - \gamma^2(t)$ sous \mathbb{Q}^1 et $\frac{F_t^1}{F_t^2}$ est une martingale lognormale de volatilité $\gamma^1(t) - \gamma^2(t)$ sous \mathbb{Q}^2 .

En conclusion, pour déterminer le prix d'une option d'échanger le flux F^1 contre le flux F^2 , il faut utiliser l'algorithme suivant :

- Identifier les portefeuilles de replication F_t^1 et F_t^2 (par exemple, en utilisant la méthode de valorisation risque-neutre), et calculer leur volatilités respectives $\gamma^1(t)$ et $\gamma^2(t)$ *par rapport au même mouvement brownien vectoriel*.
- Calculer le prix de l'option d'échange à la date t avec la formule de Black-Scholes généralisée

$$V_t = F_t^1 N \left(\frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} + \frac{1}{2} Var_t^T}{\sqrt{Var_t^T}} \right) - F_t^2 N \left(\frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} - \frac{1}{2} Var_t^T}{\sqrt{Var_t^T}} \right),$$

où $Var_t^T = \int_t^T \|\gamma^1(s) - \gamma^2(s)\|^2 ds$

Par la formule de Itô, la dynamique de V_t est

$$dV_t = N \left(\frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} + \frac{1}{2} Var_t^T}{\sqrt{Var_t^T}} \right) dF_t^1 - N \left(\frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} - \frac{1}{2} Var_t^T}{\sqrt{Var_t^T}} \right) dF_t^2.$$

L'option peut donc être répliquée par un portefeuille contenant

$$N \left(\frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} + \frac{1}{2} Var_t^T}{\sqrt{Var_t^T}} \right)$$

unités de l'actif F^1 et

$$-N \left(\frac{\log \frac{F_t^1}{F_t^2} - \frac{1}{2} Var_t^T}{\sqrt{Var_t^T}} \right)$$

unités de l'actif F^2 .

Exemple 4 (Option quanto). Une option quanto est une option sur un titre étranger avec strike en monnaie étrangère, dont le pay-off est converti en monnaie domestique moyennant un taux de change fixé dans le contrat. Le pay-off est donné par

$$\bar{X}(S_T - K),$$

où \bar{X} est le taux de change contractuel. Pour simplifier la notation, nous posons $\bar{X} = 1$ dans la suite. Cette option est sensible à la fois au risque de fluctuation de l'actif étranger et au risque de change.

Nous noterons le taux d'intérêt domestique par $r(t)$ et le taux d'intérêt étranger par $r^e(t)$. Les deux taux sont supposés déterministes. La dynamique de l'actif étranger S est

$$\frac{dS_t}{S_t} = b(t)dt + \gamma(t)dW_t,$$

et le taux de change X (valeur en monnaie domestique d'une unité de monnaie étrangère) suit la dynamique

$$\frac{dX_t}{X_t} = b^X(t)dt + \gamma^X(t)dW_t.$$

La probabilité risque-neutre sur le marché étranger est notée par \mathbb{Q}^e .

Nous appliquons les résultats de la section précédente avec $F^1 = S_T$ et $F^2 = K$. La valeur du portefeuille de réplcation pour F^2 est clairement donnée par $F_t^2 = e^{-\int_t^T r(s)ds}K$. La valeur du portefeuille de réplcation pour F^1 est

$$\begin{aligned} F_t^1 &= X_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^e} \left[e^{-\int_t^T r^e(s)ds} \frac{S_T}{X_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= X_t S_t \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^e} \left[\frac{1}{X_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] e^{-\int_t^T \gamma(s)^\perp \gamma^X(s)ds} \\ &= S_t e^{\int_t^T (r^e(s) - r(s))ds} e^{-\int_t^T \gamma(s)^\perp \gamma^X(s)ds}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que pour tout vecteur gaussien 2-dimensionnel (X, Y) ,

$$\mathbb{E}[e^{X+Y}] = \mathbb{E}[e^X] \mathbb{E}[e^Y] e^{\text{cov}(X,Y)}.$$

Le prix de l'option est donc donné par la formule (3.7), avec $Var_t^T = \int_t^T \|\gamma(s)\|^2 ds$.

Exemple 5 (Taux d'intérêt stochastiques et probabilité forward-neutre). Dans cet exemple nous supposons que le taux d'intérêt n'est pas déterministe mais peut varier de manière stochastique. Ceci implique que les zéro-coupons sont des actifs risqués. Nous supposons que le prix du zéro-coupon d'échéance T suit la dynamique lognormale

$$dB_t(T) = B_t(T)(\mu^B(t)dt + \gamma^B(t)dW_t).$$

Le prix d'une option call européen de pay-off $(S_T - K)^+$ peut alors être calculé par la formule (3.7), en posant $F^1 = S_T$ et $F^2 = K$. Les valeurs des portefeuilles

de réplication correspondantes sont $F_t^1 = S_t$ et $F_t^2 = B_t(T)$ et le prix de l'option est donné par (3.7) avec $Var_t^T = \int_t^T \|\gamma(s) - \gamma^B(s)\|^2 ds$.

Il est cependant intéressant de calculer le prix de cet option directement. En prenant l'espérance sous la probabilité risque-neutre, on trouve

$$V_t = \mathbb{E}^Q \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_T \right].$$

Pour la valorisation d'une option d'échéance T en présence de taux d'intérêt stochastiques, il est commode de choisir comme numéraire le zéro-coupon d'échéance T . La probabilité martingale associée à ce numéraire s'appelle la probabilité *forward-neutre* d'échéance T . Elle est définie par

$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}} = \frac{e^{-\int_0^T r(s) ds}}{B_0(T)}, \quad D_t = \frac{e^{-\int_0^T r(s) ds} B_t(T)}{B_0(T)}.$$

En utilisant la probabilité forward-neutre, on a alors

$$V_t = \mathbb{E}^Q \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} (S_T - K)^+ | \mathcal{F}_T \right] = B_t(T) \mathbb{E}^{Q^T} \left[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_T \right],$$

c'est-à-dire, l'effet des taux stochastiques disparaît sous cette probabilité. De plus, $S_T = \frac{S_T}{B_T(T)}$, et par définition d'une mesure martingale associée à un numéraire, $\frac{S_t}{B_t(T)}$ est une martingale sous \mathbb{Q}^T . Le prix peut donc être calculé en utilisant la formule de Black-Scholes standard, appliqué à $\frac{S_t}{B_t(T)}$, ce qui donne

$$V_t = S_t N(d_1) - K B_t(T) N(d_2),$$

avec

$$d_{1,2} = \frac{\log \frac{S_t}{K B_t(T)} \pm \frac{1}{2} Var_t^T}{\sqrt{Var_t^T}}.$$

3.3 Options à barrière et réplication statique

Dans cette section, nous nous plaçons dans le cadre du modèle Black-Scholes unidimensionnel avec volatilité et taux d'intérêt constants. Nous allons nous intéresser aux options à barrière avec fonctions pay-off arbitraires (pas nécessairement des calls et des puts). Le prix d'une option Up and In qui paye $f(S_T)$ à la date T si la barrière B a été franchie avant cette date sera noté par $UI_t(S_t, B, f(S_T), T)$, où t est la date courante et S_t est le prix courant du sous-jacent. De la même manière, UO est le prix d'une option Up and Out, et $EUR_t(S_t, f(S_T), T)$ est le prix d'une option européenne de pay-off $f(S_T)$. Ces fonctions vérifient les relations immédiates suivantes :

$$UI_t + UO_t = EUR_t \tag{3.8}$$

$$UI_t(S_t, B, f(S_T), T) = EUR_t(S_t, f(S_T), T) \quad \text{si } f(z) = 0 \text{ pour } z < B \tag{3.9}$$

$$UI_t(S_t, B, f(S_T), T) = UI_t(S_t, B, f(S_T) 1_{S_T < B}, T) \tag{3.10}$$

$$+ EUR_t(S_t, f(S_T) 1_{S_T \geq B}, T) \quad \text{en général.} \tag{3.11}$$

Valorisation par EDP et réplication dynamique L'approche EDP s'applique aux options Down and Out / Up and Out. Les prix des options In correspondantes peuvent être calculés en utilisant la relation (3.9). Nous nous concentrons sur l'exemple de Up and Out. Par le principe de valorisation risque-neutre,

$$\text{UO}_t(x, B, f(S_T), T) = \mathbb{E}^Q[e^{-r(T-t)} f(S_T) \mathbf{1}_{\sup_{t \leq s \leq T} S_s < B} | S_t = x].$$

Soit v une solution régulière de

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} = r \left(v - S \frac{\partial v}{\partial S} \right), \quad 0 \leq S \leq B, \quad 0 \leq t \leq T,$$

avec la condition au bord $v(t, B) = 0 \forall t \in [0, T]$ et la condition terminale $v(T, S) = f(S) \forall S \in [0, B]$. On note enfin $\tau_B = \inf\{t \geq 0 : S_t \geq B\}$ et $V_t = v(t \wedge \tau_B, S_{t \wedge \tau_B})$. Alors par la formule d'Itô,

$$dV_t = \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial S} dS_t + r(V_t - S_t \frac{\partial v}{\partial S}) dt, & t < \tau_B \\ 0, & t \geq \tau_B. \end{cases}$$

Par ailleurs, $V_T = v(T \wedge \tau_B, S_{T \wedge \tau_B}) = f(S_T)$ si $\tau_B > T$ et 0 sinon. On conclut que V_t est la valeur d'un portefeuille autofinancant qui réplique le prix de l'option à barrière Up and Out. Il contient $\frac{\partial v}{\partial S}(t, S_t)$ unités du sous-jacent à toute date $t < \tau_B$ et devient identiquement nul à la date τ_B .

Réplication statique Contrairement aux Calls et Puts européens, le delta d'une option à barrière n'est pas borné, ce qui rend difficile la réplication dynamique de ces options. Nous présenterons maintenant une stratégie de couverture pour les options à barrière qui utilise seulement des positions statiques en options européennes, due à P. Carr et al. [2]. La méthode est basée sur le lemme suivant :

Lemme 2. *Dans le modèle de Black-Scholes,*

$$\text{EUR}_t(S_t, f(S_T), T) = \text{EUR}_t \left(S_t, \left(\frac{S_T}{S_t} \right)^\gamma f \left(\frac{S_t^2}{S_T} \right), T \right), \quad (3.12)$$

avec $\gamma = 1 - \frac{2r}{\sigma^2}$ où r est le taux d'intérêt et σ la volatilité.

Démonstration. Commençons par observer que

$$\left(\frac{S_T}{S_0} \right)^\gamma = e^{\sigma\gamma W_T - \frac{1}{2}(\sigma\gamma)^2 T}$$

est d'espérance 1 et nous pouvons introduire une probabilité $\tilde{\mathbb{Q}}$ via

$$\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \left(\frac{S_T}{S_0} \right)^\gamma.$$

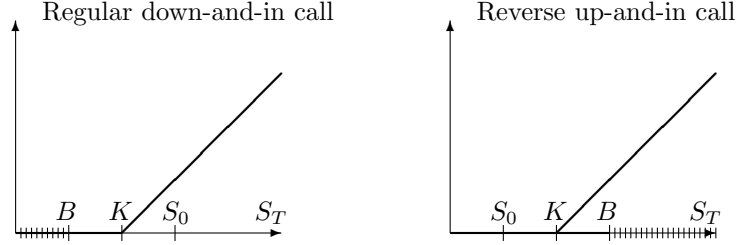


FIGURE 3.1 – Types d'options à barrière.

Par le théorème de Girsanov, sous cette probabilité $\widetilde{W}_s = W_s - \sigma\gamma s$ est un mouvement brownien. Par ailleurs,

$$\frac{S_0^2}{S_T} = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T - \sigma \widetilde{W}_T},$$

ce qui montre que la loi de $\frac{S_0^2}{S_T}$ sous $\widetilde{\mathbb{Q}}$ est la même que la loi de S_T sous \mathbb{Q} . On en déduit

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT} f(S_T)] = \mathbb{E}^{\widetilde{\mathbb{Q}}}\left[e^{-rT} f\left(\frac{S_0^2}{S_T}\right)\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT} \left(\frac{S_T}{S_0}\right)^\gamma f\left(\frac{S_0^2}{S_T}\right)\right]$$

En appliquant le même résultat entre t et T , la démonstration est terminée. \square

La méthode que nous allons décrire s'applique à tous les modèles qui possèdent une propriété de symétrie de ce type.

Une option à barrière est dite *regular* si la fonction pay-off est nulle à la barrière et au-delà, et *reverse* sinon (voir Fig. 3.1 pour une illustration). Les relations (3.9)–(3.11) impliquent que pour déterminer la couverture pour une option à barrière quelconque, il est suffisant d'étudier les options de type In Regular. De plus, les options Up et Down peuvent être traité de la même manière. Nous allons donc nous concentrer sur les options Up and In Regular dans la suite.

Réplication d'options Regular Soit f la fonction pay-off d'une option Up and In Regular. On a donc $f(z) = 0$ pour $z \geq B$. Soit τ_B le premier temps de passage par le processus de prix au-dessus du niveau B . On considère la stratégie de couverture suivante :

- A la date t , acheter l'option européenne $\text{EUR}_t\left(S_t, \left(\frac{S_T}{B}\right)^\gamma f\left(\frac{B^2}{S_T}\right), T\right)$.
- Lorsque la barrière est atteinte (si jamais), vendre $\text{EUR}_{\tau_B}\left(B, \left(\frac{S_T}{B}\right)^\gamma f\left(\frac{B^2}{S_T}\right), T\right)$ et acheter $\text{EUR}_{\tau_B}(B, f(S_T), T)$. Cette transaction à un prix nul grâce à la relation de symétrie (3.12).

Il est facile de vérifier que cette stratégie réplique l'option $UI_t(S_t, f(S_T), T)$. De plus, on en déduit la formule de pricing suivante :

$$\begin{aligned} UI_t(S_t, B, f(S_T), T) &= \text{EUR}_t \left(S_t, \left(\frac{S_T}{B} \right)^\gamma f \left(\frac{B^2}{S_T} \right), T \right) \\ &= \left(\frac{S_t}{B} \right)^\gamma \text{EUR}_t \left(S_t, f \left(\frac{B^2}{S_t^2} S_T \right), T \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Le cas de calls et puts Equation (3.13) montre que le prix d'une option In Regular peut être exprimé en termes du prix de l'option européenne correspondante, par exemple,

$$UIP_t(S_t, B, K, T) = \left(\frac{S_t}{B} \right)^{\gamma-2} \text{Put}_t \left(\frac{KS_t^2}{B^2}, T \right).$$

Cependant, sauf si $\gamma = 1$, la stratégie de réplication fait intervenir des options européennes autres que calls et puts. Si $\gamma = 1$ (c'est-à-dire que le taux sans risque est nul), les options In Regular peuvent être répliqués statiquement avec une seule option call / put. Par exemple,

$$\begin{aligned} \text{EUR}_t \left(S_t, \left(\frac{S_T}{B} \right)^\gamma \left(K - \frac{B^2}{S_T} \right)^+, T \right) &= \text{EUR}_t \left(S_t, \left(\frac{KS_T}{B} - B \right)^+, T \right) \\ &= \frac{K}{B} \text{Call}_t \left(\frac{B^2}{K}, T \right). \end{aligned}$$

La réplication des options Reverse fera intervenir des pay-offs autres que call / put même si $\gamma = 1$.

La réplication d'options Regular lorsque $\gamma \neq 1$ est basée sur le résultat suivant.

Lemme 3. *Soit f une fonction deux fois dérivable, dont la deuxième dérivée est continue par morceaux. Alors pour tous F, x positifs,*

$$f(x) = f(F) + f'(F)(x - F) + \int_0^F f''(K)(K - x)^+ dK + \int_F^\infty f''(K)(x - K)^+ dK.$$

Démonstration. Laissée en exercice. \square

Dans le cas d'une option Put Up and In Regular, la fonction à répliquer est

$$\left(\frac{S_T}{B} \right)^\gamma \left(K - \frac{B^2}{S_T} \right)^+ = \left(\frac{B}{K} \right)^{\gamma-2} \left(\frac{KS_T}{B^2} \right)^{\gamma-1} \left(S_T - \frac{B^2}{K} \right)^+$$

Cette fonction n'est pas différentiable deux fois mais elle vérifie

$$\left(\frac{S_T}{B} \right)^\gamma \left(K - \frac{B^2}{S_T} \right)^+ = \left(\frac{B}{K} \right)^{\gamma-2} f(S_T) + \left(\frac{B}{K} \right)^{\gamma-2} \left(S_T - \frac{B^2}{K} \right)^+$$

avec

$$f(x) = \left(\left(\frac{Kx}{B^2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right) \left(x - \frac{B^2}{K} \right)^+$$

Les dérivées de la fonction f sont données par

$$f'(x) = \left\{ \gamma \left(\frac{Kx}{B^2} \right)^{\gamma-1} + (1-\gamma) \left(\frac{Kx}{B^2} \right)^{\gamma-2} - 1 \right\} \mathbf{1}_{x \geq \frac{B^2}{K}}$$

$$f''(x) = (\gamma-1) \left(\frac{Kx}{B^2} \right)^{\gamma-2} \left\{ \frac{\gamma K}{B^2} - \frac{\gamma-2}{x} \right\} \mathbf{1}_{x \geq \frac{B^2}{K}}.$$

Au final, prenant $F = \frac{B^2}{K}$ dans Lemma 3, on a

$$\left(\frac{S_T}{B} \right)^\gamma \left(K - \frac{B^2}{S_T} \right)^+ = \left(\frac{B}{K} \right)^{\gamma-2} \left(S_T - \frac{B^2}{K} \right)^+ + \int_{B^2/K}^\infty \left(\frac{B}{x} \right)^{2-\gamma} \left\{ \frac{\gamma K}{B^2} - \frac{\gamma-2}{x} \right\} (S_T - x)^+ dx.$$

3.4 Swaps de variance

Un autre exemple d'application du principe de réplication statique est donné par les swaps de variance. Les swaps de variance sont des actifs contingents qui permettent de prendre des positions sur la volatilité (variance) de sous-jacent. Un swap de variance a un pay-off à l'échéance égal à

$$H_T = \frac{NA}{n} \sum_{i=1}^n \left(\log \frac{S_i}{S_{i-1}} \right)^2 - N\sigma_K^2,$$

où

- $A = 250$ est le nombre moyen de jours ouvrés dans l'année ;
- N est le nominal du contrat ;
- n représente le nombre de jours ouvrés jusqu'à l'échéance T ;
- σ_K est la volatilité 'strike'.

En d'autres mots, un swap de variance permet d'échanger un montant fixe $N\sigma_K^2$ contre un flux aléatoire égal à la variance réalisée du sous-jacent.

Dans un modèle à trajectoires continues, un swap de variance peut être répliqué par un portefeuille statique contenant des options européennes et un portefeuille dynamique contenant le sous-jacent [3]. Pour simplifier le traitement, on va approcher la somme dans le pay-off de produit par une intégrale :

$$H_T = N \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_s^2 ds - \sigma_K^2 \right\}.$$

Supposons que le sous-jacent S est décrit par

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t,$$

où μ_t et σ_t sont deux processus stochastiques. La formule d'Itô donne alors

$$\frac{1}{2} \int_0^T \sigma_s^2 ds = \int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - \log \frac{S_T}{S_0}. \quad (3.14)$$

Pour répliquer la variance intégrée, il suffit alors de répliquer les deux termes dans la partie droite.

Soit V_t la valeur du portefeuille qui réplique $\int_0^T \frac{dS_t}{S_t}$ et soit Q une probabilité risque-neutre. On a alors

$$\begin{aligned} V_t &= e^{-r(T-t)} E \left[\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= e^{-r(T-t)} \left\{ \int_0^t \frac{dS_s}{S_s} + r(T-t) \right\} \end{aligned}$$

d'où on déduit

$$dV_t = r(V_t - \delta_t S_t) dt + \delta_t dS_t \quad \text{avec} \quad \delta_t = \frac{e^{-r(T-t)}}{S_t}.$$

Le premier terme de la partie droite de (3.14) peut donc être répliqué par un portefeuille autofinçant consistant à investir $e^{-r(T-t)}$ en actions et ayant la valeur initiale $V_0 = rT e^{-rT}$.

Le deuxième terme dans la partie droite de (3.14) (le log-contrat) peut être répliqué par un portefeuille statique de calls et puts en utilisant la représentation du Lemme 3. Pour calculer le prix d'une option européenne d'échéance T et de pay-off $f(S_T) = \log \frac{S_T}{S_0}$, on pose $F = S_0 e^{rT}$ et calcule l'espérance de $e^{-rT} f(S_T)$ sous la probabilité risque-neutre en utilisant la représentation du Lemme 3 :

$$\text{Prix} = e^{-rT} rT - \int_0^F \frac{P(T, K)}{K^2} dK - \int_F^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK,$$

où $P(T, K)$ est le prix d'un put et $C(T, K)$ le prix d'un call d'échéance T et strike K . En rajoutant ceci au prix du portefeuille de replication pour le premier terme de (3.14), on trouve que le prix du portefeuille de replication pour $\frac{1}{2} \int_0^T \sigma_s^2 ds$ est égal à

$$\int_0^F \frac{P(T, K)}{K^2} dK + \int_F^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK.$$

Finalement, le σ_K qui annule la valeur du swap de variance satisfait

$$e^{-rT} \sigma_K^2 = \frac{2}{T} \int_0^F \frac{P(T, K)}{K^2} dK + \frac{2}{T} \int_F^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK.$$

L'indice VIX VIX est l'indice de volatilité d'options sur S&P 500, publié par CBOE. Entre 1993 et 2003, cet indice était calculé comme la moyenne des volatilités implicites de 8 options les plus liquides, mais en 2003 la méthodologie a été changé, et le nouvel indice est calculé en prenant en compte toutes les options par la formule (3.4). Le rapport publié sur le site de CBOE (faites un recherche google sur "vix white paper") donne la nouvelle formule : on calcule

$$VIX_T^2 = \frac{2e^{rT}}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} Q_i(K_i) - \frac{1}{T} \left[\frac{F}{K_0} - 1 \right]^2,$$

pour les deux échéances les plus courtes T_1 et T_2 , où

- Q_i est le prix de l'option (call ou put) qui est hors de la monnaie pour le strike K_i ;
- F est le forward calculé par la parité call-put ;
- K_0 est le plus grand strike qui est plus petit que le forward ;
- ΔK_i est l'intervalle entre les strikes.

Le troisième terme est un terme de correction :

$$\begin{aligned} & \frac{2}{T} \int_0^F \frac{P(T, K)}{K^2} dK + \frac{2}{T} \int_F^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{K_0} \frac{P(T, K)}{K^2} dK + \frac{2}{T} \int_{K_0}^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK + \frac{2}{T} \int_{K_0}^F \frac{P(K) - C(K)}{K^2} dK \\ &\approx \frac{2}{T} \int_0^{K_0} \frac{P(T, K)}{K^2} dK + \frac{2}{T} \int_{K_0}^\infty \frac{C(T, K)}{K^2} dK - \frac{e^{-rT}}{T} \frac{(F - K_0)^2}{K_0^2}. \end{aligned}$$

Pour calculer l'indice VIX, on fait une interpolation linéaire entre VIX_{T_1} et VIX_{T_2} pour arriver à une maturité de 30 jours.

Chapitre 4

Volatilité locale et la formule de Dupire

- *Modèle à volatilité locale. Modèle CEV.*
- *Arbre trinomial : construction de l'arbre, calcul des probabilités de transition, algorithme d'évaluation backward.*
- *EDP et formule de Dupire (en termes des prix d'options).*
- *Formule de Dupire en termes des volatilités implicites.*
- *Volatilité implicite dans la limite de très courte maturité.*
- *Paramétrisation SVI pour la volatilité implicite.*

4.1 Modèles à volatilité locale

Dans le chapitre précédent nous avons vu que le modèle de Black-Scholes à volatilité constante ne peut pas reproduire l'ensemble des prix d'options observés sur le marché pour un sous-jacent donné, car leur volatilité implicite varie en fonction du strike et de la maturité. Pour prendre en compte le smile du marché tout un restant dans le cadre markovien et complet (un seul facteur de risque) une solution naturelle est de modéliser la volatilité comme une fonction déterministe du temps et de la valeur du sous-jacent :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma(t, S_t) dW_t, \quad (4.1)$$

Par le même argument d'autofinancement que dans le modèle Black-Scholes, le prix d'une option qui paie $g(S_T)$ à l'instant T satisfait

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma(t, S)^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} = rv(t, S) - rS \frac{\partial v}{\partial S}, \quad v(T, S) = g(S),$$

et le portefeuille autofinçant de couverture contient $\delta_t = \frac{\partial v(t, S_t)}{\partial S}$ actions. L'équation de pricing garde alors la même forme que dans le modèle de Black-Scholes mais on ne peut plus en déduire une formule explicite car la volatilité dépend maintenant du sous-jacent.

De même, par analogie au Théorème 5, on peut démontrer que le prix de l'option peut être exprimé comme espérance :

$$v(t, S) = E^Q[e^{-\int_t^T r_s ds} g(S_T) | S_t = S],$$

où Q (probabilité risque-neutre) est une probabilité différente de P , sous laquelle la dynamique de S est donnée par

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma(t, S_t) dW_t.$$

En toute rigueur, pour la validité de ce résultat il faut supposer qu'il existe un processus de *prime de risque* λ_t tel que $\mu_t = r_t + \lambda_t \sigma_t$ et

$$E[e^{\frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s^2 ds}] < \infty.$$

Par exemple, il suffit que λ soit bornée.

4.2 Modèle CEV

Un exemple de modèle à volatilité locale bien étudié dans la littérature est donné par le modèle CEV (Constant Elasticity of Variance) de [5]. Dans ce modèle, la volatilité est une fonction puissance du niveau de sous-jacent :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \frac{\sigma_0}{S_t^{1-\alpha}} dW_t \quad (4.2)$$

Plaçons-nous sous la probabilité risque-neutre, et supposons dans un premier temps que le prix forward du sous-jacent $F_t = e^{r(T-t)} S_t$ suit le modèle CEV :

$$dF_t = \sigma_0 F_t^\alpha dW_t, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (4.3)$$

Le modèle de Black-Scholes et le modèle gaussien sont des cas limites de cette équation avec $\alpha = 1$ et $\alpha \rightarrow 0$ respectivement. La valeur 0 est une barrière *absorbante*, si $F_t = 0$ pour un t , $F_s \equiv 0$ pour tout $s \geq t$.

Volatilité implicite La forme de la volatilité implicite du modèle CEV est connue grâce à l'approximation asymptotique de Hagan et Woodward [10] :

$$\sigma^{imp}(K, T) = \frac{\sigma_0}{F_m^{1-\alpha}} \left\{ 1 + \frac{(1-\alpha)(2+\alpha)}{24} \left(\frac{F_0 - K}{F_m} \right)^2 + \frac{(1-\alpha)^2}{24} \frac{\sigma_0^2 T}{F_m^{2-2\alpha}} + \dots \right\}. \quad (4.4)$$

avec $F_m = \frac{1}{2}(F_0 + K)$. Au premier ordre, on a donc $\sigma^{imp}(K, T) \approx \frac{\sigma_0}{F_m^{1-\alpha}}$: la volatilité implicite a la même forme que la volatilité locale mais avec une pente à la monnaie 2 fois plus petite.

Cas général ($\mu \neq 0$) Soit $F_t^{(\mu)} := e^{\mu t} F_{\tau(t)}$, avec $\tau(t)$ un changement de temps déterministe à préciser. Alors

$$dF_t^{(\mu)} = \mu F_t^{(\mu)} dt + e^{\mu t} dF_{\tau(t)}.$$

On a par ailleurs

$$F_{\tau(t)} = \int_0^{\tau(t)} \sigma_0 F_s^\alpha dW_s = \int_0^t \sigma_0 F_{\tau(s)}^\alpha dW_{\tau(s)},$$

d'où

$$dF_{\tau(t)}^0 = \sigma_0 F_{\tau(t)}^\alpha \sqrt{\tau'(t)} dW_t = e^{-\alpha \mu t} \sqrt{\tau'(t)} \sigma_0 (F_t^{(\mu)})^\alpha dW_t.$$

Finalement, en choisissant τ avec $\tau'(t) = e^{2\mu(\alpha-1)t}$, c'est-à-dire,

$$\tau(t) = \frac{1 - e^{2\mu(1-\alpha)t}}{2\mu(1-\alpha)t}$$

on retrouve l'équation (4.2).

Complément technique sur le modèle CEV L'existence de solution de l'équation (4.3) peut être établi en reliant le processus F avec le processus de Bessel. Soit (B^1, \dots, B^n) un mouvement brownien standard en dimension n et $R_t^2 = \sum_{i=1}^n (B_t^i)^2$. Il est facile de voir que

$$d(R_t^2) = 2R_t dW_t + n dt \quad (4.5)$$

où W est un nouveau mouvement brownien. En posant $\rho_t = R_t^2$, on a donc

$$d\rho_t = 2\sqrt{|\rho_t|} dW_t + n dt \quad (4.6)$$

et, pour $n > 1$,

$$dR_t = dW_t + \frac{n-1}{2} \frac{dt}{R_t}.$$

On peut démontrer que l'équation (4.6) admet une solution forte pour des valeurs de n non entières, permettant de définir le processus de Bessel [4] :

Définition 5. Soit $\delta \geq 0$ et $x \geq 0$. L'unique solution forte de l'équation

$$\rho_t = x + \delta t + 2 \int_0^t \sqrt{\rho_s} dW_s$$

s'appelle le processus BESQ (Bessel squared) de dimension δ . Le processus $R_t = \sqrt{\rho_t}$ s'appelle le processus de Bessel de dimension δ .

Soit $\tau = \inf\{t : F_t = 0\}$ et posons $X_t = \frac{1}{\sigma_0(1-\alpha)}F_t^{1-\alpha}$. Par une application de la formule d'Itô, sur l'ensemble sur $\{t < \tau\}$,

$$dX_t = dW_t - \frac{\alpha}{2(1-\alpha)X_t}dt,$$

ce qui donne le lien entre CEV et le processus de Bessel.

La contrainte $0 < \alpha \leq 1$ est imposée puisqu'on peut démontrer que pour $\alpha > 1$, (F_t) est une martingale locale stricte, c'est-à-dire, pas une vraie martingale, ce qui peut conduire, par exemple, à la violation de la parité Call-Put et d'autres inconvénients. Montrons que pour $0 < \alpha \leq 1$, l'équation (4.3) définit une vraie martingale de carré intégrable sur $[0, T]$ pour tout $T < \infty$. Pour cela il est suffisant de voir que

$$E\{[F]_T\} = E\left\{\sigma_0^2 \int_0^T F_t^{2\alpha} dt\right\} < \infty. \quad (4.7)$$

Soit $\tau_n = \inf\{t : F_t \geq n\}$. $F_{T \wedge \tau_n}$ est alors de carré intégrable, et on a, pour $0 < \alpha \leq 1$,

$$\begin{aligned} E[F_{\tau_n \wedge T}^2] &= \sigma_0^2 E\left[\int_0^{\tau_n \wedge T} F_t^{2\alpha} dt\right] \leq \sigma_0^2 E\left[\int_0^{\tau_n \wedge T} (1 + F_t^2) dt\right] \\ &\leq \sigma_0^2 E\left[\int_0^T (1 + F_{t \wedge \tau_n}^2) dt\right] \end{aligned}$$

Par le lemme de Gronwall on a alors

$$\sigma_0^2 E\left[\int_0^{\tau_n \wedge T} F_t^{2\alpha} dt\right] = E[F_{\tau_n \wedge T}^2] \leq \sigma_0^2 T e^{\sigma_0^2 T},$$

d'où (4.7) est déduit par convergence monotone.

4.3 Arbre trinomial de pricing

Dans cette section, pour simplifier l'exposé, on pose $r_t \equiv r$ pour tout t . Une première méthode pour calculer numériquement les prix des options dans un modèle à volatilité locale consiste à approcher la diffusion en temps continu S par une chaîne de Markov (un arbre) $\hat{S}_{t_i}, i = 0, \dots, N, t_i = t_0 + i\Delta t$, en utilisant un résultat de convergence (théorème 12 à la fin de cette section) des chaînes de Markov vers les diffusions. Dans un arbre binomial défini par

$$\hat{S}_{t_{i+1}} = \begin{cases} u\hat{S}_{t_i}, & q \\ d\hat{S}_{t_i}, & 1 - q \end{cases}$$

la probabilité risque-neutre de transition q est fixée par la condition de martingale : $qu + (1 - q)d = 1 + r\Delta t$. Pour tenir compte du fait que la volatilité est variable, on devrait alors faire varier les paramètres u et d en fonction de la position

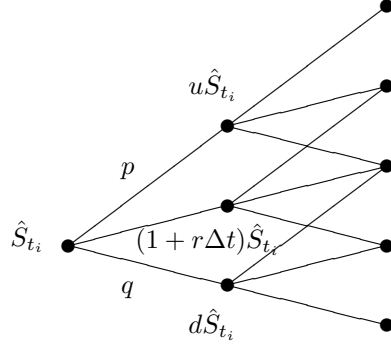


FIGURE 4.1 – Arbre trinomial.

du noeud dans l'arbre [13], mais ceci conduit à des difficultés d'implémentation (difficile par exemple d'obtenir un arbre recombinaut). Ce problème ne se pose pas si on utilise un arbre *trinomial* :

$$\hat{S}_{t_{i+1}} = \begin{cases} u\hat{S}_{t_i}, & p \\ (1+r\Delta t)\hat{S}_{t_i}, & 1-p-q, \\ d\hat{S}_{t_i}, & q \end{cases}$$

Pour la convergence vers le processus continu (voir théorème 12) on impose :

$$\begin{aligned} E[\hat{S}_{t_{i+1}}|\hat{S}_{t_i}] &= (1+r\Delta t)\hat{S}_{t_i} \quad (\text{arbre risque-neutre}) \\ \text{Var}[\hat{S}_{t_{i+1}}|\hat{S}_{t_i}] &= \hat{S}_{t_i}^2 \sigma^2(t_i, \hat{S}_{t_i}) \Delta t \end{aligned}$$

Dans un arbre trinomial on peut donc fixer u et d (le squelette de l'arbre) librement et choisir les probabilités de transition $p(t_i, \hat{S}_{t_i})$ et $q(t_i, \hat{S}_{t_i})$ pour satisfaire les équations ci-dessus. Un calcul rapide laissé au lecteur montre qu'il faut prendre

$$p(t_i, \hat{S}_{t_i}) = \frac{\sigma(t_i, \hat{S}_{t_i})^2 \Delta t}{(u-d)(u-1-r\Delta t)} \quad q(t_i, \hat{S}_{t_i}) = \frac{\sigma(t_i, \hat{S}_{t_i})^2 \Delta t}{(u-d)(1+r\Delta t-d)} \quad (4.8)$$

Pour que l'arbre soit recombinaut (un arbre est dit recombinaut si le nombre de noeuds dans chaque tranche croit linéairement avec temps, comme sur le dessin 4.1, et non pas exponentiellement), on pose $ud = (1+r\Delta t)^2$.

L'arbre n'admet pas d'opportunité d'arbitrage si toutes les probabilités de transition sont positives, et pour cela il suffit que $p+q \leq 1$ dans chaque noeud

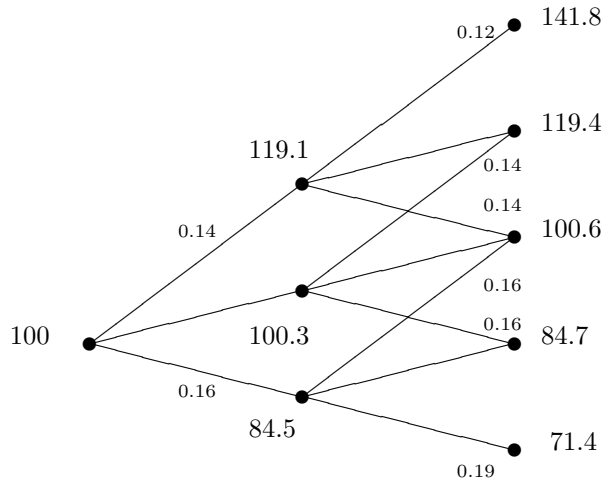


FIGURE 4.2 – Exemple d'un arbre trinomial

de l'arbre. Ceci est toujours vrai si le pas de temps Δt est suffisamment petit en comparaison avec le pas d'espace (à comparer avec la condition CFL de stabilité d'un schéma de différences finies explicite). Par exemple, $p+q \leq 1$ si la condition suivante est respectée (les détails du calcul sont laissés au lecteur) :

$$1 + r\Delta t - d > \sigma(t_i, \hat{S}_{t_i})\sqrt{\Delta t}.$$

Pour que cette inégalité soit toujours vérifiée, on peut poser

$$d = 1 + r\Delta t - \bar{\sigma}\sqrt{\Delta t},$$

où $\bar{\sigma}$ est une constante qui satisfait $\bar{\sigma} > \sigma(t, S)$ dans tous les noeuds de l'arbre. Cette constante n'est pas toujours facile à trouver si $\sigma(t, S)$ n'est pas bornée. Pour contourner cette difficulté, il suffit de choisir $\bar{\sigma}$ assez grand et remplacer le modèle initial par le modèle

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \min(\bar{\sigma}, \sigma(t, S_t)) dW_t.$$

L'arbre construit à partir de cette diffusion sera toujours sans opportunité d'arbitrage, au prix de travailler dans un modèle légèrement différent.

Evaluation backward des prix d'options dans un arbre trinomial Pour calculer le prix d'une option call européen sur un arbre, l'algorithme standard peut être employé :

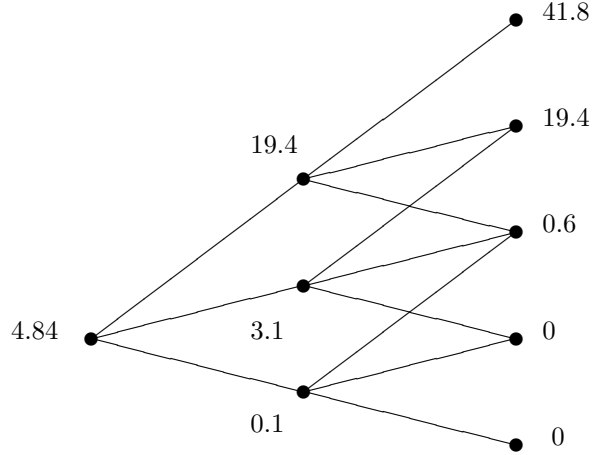


FIGURE 4.3 – Exemple d'évaluation (prix d'une option call dans chaque noeud de l'arbre avec les données de l'exemple 6.)

- A la date finale, les prix sont donnés par : $C(t_N, S) = (S - K)^+$.
- A toute date t_i pour $i < N$, les prix dans tous les noeuds de l'arbre sont calculés à partir des prix à la date t_{i+1} par l'évaluation risque-neutre :

$$C(t_i, S) = \frac{1}{1 + r\Delta t} \{pC(t_{i+1}, uS) + qC(t_{i+1}, dS) + (1 - p - q)C(t_{i+1}, (1 + r\Delta t)S)\}.$$

Exemple 6 (Modèle CEV). Prenons l'exemple du modèle CEV (4.2). Avec les paramètres $S_0 = 100$, $\alpha = 0.5$, $\sigma_0 = 3$, $r = 0.03$, $N = 2$, $\Delta t = 0.1$ et $\bar{\sigma} = 0.5$, on trouve $d \approx 0.845$, et $u \approx 1.191$, ce qui correspond à l'arbre de la figure 4.2. Les prix d'une option call de strike $K = 100$ dans les différents noeuds de l'arbre, obtenus par l'évaluation backward, sont montrés sur fig. 4.3. En itérant la procédure pour plusieurs strikes (avec un arbre plus grand et les données légèrement différentes), on trouve un comportement de volatilité implicite tracé sur fig. 4.4, qui montre que les modèles à volatilité locale reproduisent bien le phénomène de skew de volatilité.

Approximation d'un processus de diffusion par une chaîne de Markov
Soit X une diffusion markovienne :

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,$$

où W est un mouvement standard, et pour tout $h > 0$, soit $\{X_n^h\}_{n \geq 1}$ une chaîne de Markov. On dit que la famille de chaînes de Markov $\{X_n^h\}_{n \geq 1}^{h > 0}$ est localement

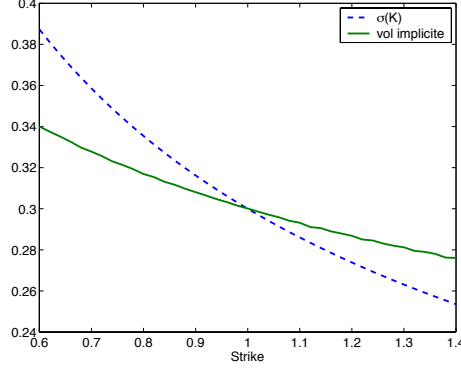


FIGURE 4.4 – Skew (profil décroissant) de volatilité dans le modèle CEV avec $\sigma = 0.3$, $\alpha = 0.5$, $S_0 = 1$ et $T = 1$

consistante avec X si elle satisfait les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} E[\Delta X_n^h | X_n^h] &= \mu(X_n^h)h + o(h), \\ \text{Var}[\Delta X_n^h | X_n^h] &= a(X_n^h)h + o(h), \\ \sup_{n,\omega} |\Delta X_n^h| &\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

où on utilise la notation $\Delta X_n^h := X_{n+1}^h - X_n^h$ et $a(x) = \sigma(x)\sigma(x)^\perp$.

Théorème 12 (Approximation par chaîne de Markov, [11]). *Soit σ et μ continus et bornés et soit $\{X_n^h\}_{n \geq 1}^{h > 0}$ une famille de chaînes de Markov faiblement consistante avec X . Alors le processus interpolé défini par*

$$\tilde{X}_t^h = X_{[t/h]}^h$$

converge faiblement vers une diffusion markovienne avec dérive μ et coefficient de diffusion σ .

4.4 Equation et formule de Dupire

Rappelons que dans un modèle de volatilité locale le prix d'une option qui paie $g(S_T)$ à l'instant T satisfait

$$rv(t, S) = \frac{\partial v}{\partial t} + rS \frac{\partial v}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma(t, S)^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}, \quad v(T, S) = g(S). \quad (4.9)$$

Ceci est une équation *backward*, car on lui associe une condition terminale et l'équation se résout sur l'intervalle $[t, T]$ dans la direction $T \rightarrow t$. Cette équation est vérifiée par le prix de toute option européenne, pas nécessairement call ou

put. Elle permet de calculer le prix d'une option en fonction de la date d'observation t et de la valeur actuelle du sous-jacent S_t .

Notre objectif maintenant est de trouver une fonction de volatilité locale $\sigma(t, S)$ qui reproduit, à une date donnée, les prix observés des calls pour tous les strikes et toutes les maturités. Equation (4.9) ne permet pas de reconstruire la volatilité locale en écrivant

$$\sigma^2(t, S) = \frac{rv - \frac{\partial v}{\partial t} - rS \frac{\partial v}{\partial S}}{\frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}},$$

car à une date donnée, les valeurs de t et S sont fixées, et on ne peut pas calculer les dérivées partielles. La solution à ce problème a été donnée par Bruno Dupire [6] qui a proposé une méthode pour calculer $\sigma(t, S)$ à partir d'une observation des prix d'options (pour tous strikes et maturités) à une date donnée. Plus précisément, il a démontré le résultat suivant.

Dans un modèle à volatilité locale, les prix de calls $C(t, S_t, T, K)$ vérifient l'équation forward (avec condition initiale), appelée equation de Dupire :

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - rK \frac{\partial C}{\partial K}, \quad C(t, S_t, t, K) = (S_t - K)^+$$

Cette équation s'applique uniquement aux prix des options Call, qui sont cette fois considérés comme fonctions du strike K et de la maturité T . Comme à une date donnée on peut observer les prix d'options de plusieurs strikes et maturités, cette équation peut être utilisée pour recalculer la fonction de volatilité $\sigma(\cdot, \cdot)$ à partir des prix d'options.

Dans un modèle de volatilité locale, la fonction de volatilité σ peut être retrouvée de façon unique avec la formule de Dupire :

$$\sigma(T, K) = \sqrt{2 \frac{\frac{\partial C}{\partial T} + rK \frac{\partial C}{\partial K}}{K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}}} \quad (4.10)$$

Le fait qu'on puisse retrouver de façon unique un processus markovien continu à partir des prix d'options européennes n'implique pas qu'il n'y a pas d'autres modèles (non markoviens ou non continus) qui évaluent les options européennes de la même façon. La connaissance des prix des options européennes détermine les distributions marginales du processus, mais la loi du processus ne se limite pas à ces distributions marginales.

Théorème 13. Soit $(S_t)_{t_0 \leq t}$ une solution de l'EDS

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma(t, S_t) dW_t, \quad S_{t_0} = S_0.$$

Supposons que

1. S_t est de carré intégrable :

$$E \left[\int_{t_0}^T S_t^2 dt \right] < \infty, \quad \forall T$$

2. Pour chaque $t > t_0$, la variable aléatoire S_t a une densité $p(t, x)$, continue sur $(t_0, \infty) \times (0, \infty)$.

3. Le coefficient de diffusion $\sigma(t, x)$ est continu sur $(t_0, \infty) \times (0, \infty)$.

Alors la fonction de prix d'une option call

$$C(T, K) = e^{-r(T-t_0)} E[(S_T - K)^+].$$

satisfait l'équation de Dupire

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma^2(T, K) K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} - rK \frac{\partial C}{\partial K}, \quad (T, K) \in [t_0, \infty) \times [0, \infty) \quad (4.11)$$

avec condition initiale $C(t_0, K) = (S_0 - K)^+$.

Preuve. La démonstration repose sur l'application de la formule d'Itô à la semimartingale $e^{-rt}(S_t - K)^+$. Puisque la fonction $f(x) = x^+$ n'est pas C^2 , la formule d'Itô classique ne s'applique pas directement. Une solution possible [7] consiste à utiliser la formule de Meyer-Itô pour les fonctions convexes [12]. Ici, nous adoptons une autre approche qui consiste à régulariser f en introduisant la fonction

$$f_\varepsilon(x) = \frac{(x + \varepsilon/2)^2}{2\varepsilon} 1_{-\varepsilon/2 \leq x \leq \varepsilon/2} + x 1_{x > \varepsilon/2}.$$

Il est clair que f_ε est 2 fois différentiable et différente de f seulement si $|x| < \varepsilon/2$. De plus, on a

$$f'_\varepsilon(x) = \frac{x + \varepsilon/2}{\varepsilon} 1_{-\varepsilon/2 \leq x \leq \varepsilon/2} + 1_{x > \varepsilon/2}, \quad f''_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} 1_{-\varepsilon/2 \leq x \leq \varepsilon/2}.$$

L'application de la formule d'Itô standard à $e^{-rt} f_\varepsilon(S_t - K)$ entre T et $T + \theta$ donne

$$\begin{aligned} e^{-r(T+\theta)} f_\varepsilon(S_{T+\theta} - K) - e^{-rT} f_\varepsilon(S_T - K) &= -r \int_T^{T+\theta} e^{-rt} f_\varepsilon(S_t - K) dt \\ &+ \int_T^{T+\theta} e^{-rt} f'_\varepsilon(S_t - K) dS_t + \frac{1}{2} \int_T^{T+\theta} e^{-rt} f''_\varepsilon(S_t - K) \sigma^2(t, S_t) S_t^2 dt. \end{aligned} \quad (4.12)$$

En prenant l'espérance de chaque terme dans (4.12) sous l'hypothèse 1 ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned} e^{-r(T+\theta)} E[f_\varepsilon(S_{T+\theta} - K)] - e^{-rT} E[f_\varepsilon(S_T - K)] &= -r \int_T^{T+\theta} e^{-rt} E[f_\varepsilon(S_t - K)] dt \\ &+ \int_T^{T+\theta} e^{-rt} E[f'_\varepsilon(S_t - K) S_t] r dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_T^{T+\theta} e^{-rt} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} (K + x)^2 \sigma^2(t, K + x) p(t, K + x) dt, \end{aligned} \quad (4.13)$$

En utilisant l'hypothèse 2 ci-dessus, on peut passer à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} & C(T + \theta, K) - C(T, K) \\ &= -r \int_T^{T+\theta} C(t, K) dt + r \int_T^{T+\theta} e^{-rt} E[S_t 1_{S_t \geq K}] dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_T^{T+\theta} e^{-rt} \sigma^2(t, K) K^2 p(t, K) dt \\ &= rK \int_T^{T+\theta} e^{-rt} P[S_t \geq K] dt + \frac{1}{2} \int_T^{T+\theta} e^{-rt} \sigma^2(t, K) K^2 p(t, K) dt. \end{aligned}$$

En divisant les deux parties par θ et en passant à la limite $\theta \rightarrow 0$, ceci donne

$$\frac{\partial C}{\partial T} = rK e^{-rT} P[S_T \geq K] + \frac{1}{2} e^{-rT} \sigma^2(T, K) K^2 p(T, K).$$

Finalement, en observant que

$$e^{-rT} P[S_T \geq K] = -\frac{\partial C}{\partial K} \quad \text{et} \quad e^{-rT} p(T, K) = \frac{\partial^2 C}{\partial K^2},$$

on trouve l'équation de Dupire. \square

Modèle à volatilité locale comme projection markovienne Soit $(S_t)_{t_0 \leq t}$ un processus d'Itô général de la forme

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma_t dW_t, \quad S_{t_0} = S_0$$

avec σ_t aléatoire, et supposons que $\sigma^2(t, x) = E[\sigma_t^2 | S_t = x]$ vérifie les hypothèses du théorème ci-dessus. En suivant la preuve étape par étape, il est facile de se convaincre que les prix des options dans le modèle associé à (S_t) vérifient l'équation de Dupire avec volatilité $\sigma(t, x)$. Autrement dit, la fonction de volatilité $\sigma^2(t, x) = E[\sigma_t^2 | S_t = x]$ définit une diffusion markovienne qui a les mêmes prix d'options européennes et donc les mêmes lois marginales que (S_t) . Cette diffusion s'appelle la *projection markovienne* de (S_t) .

Théorème 13 permet de retrouver le coefficient de volatilité à partir d'un ensemble complet de prix de calls à une date donnée, *si on sait que ces prix proviennent d'un modèle de volatilité locale*. Il ne permet pas directement de répondre à la question suivante : étant donné un système de prix de calls $(C(T, K))_{T \geq 0, K \geq 0}$, est-ce qu'il existe un modèle de diffusion continu permettant de reproduire ces prix ? Pour appliquer la formule de Dupire (4.10) on a besoin au moins de supposer $\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} > 0$ et $\frac{\partial C}{\partial T} + rK \frac{\partial C}{\partial K} \geq 0$. Ces contraintes correspondent aux contraintes d'arbitrage de positivité d'un *butterfly spread* et d'un *calendar spread* respectivement (voir section 1.2).

Exemple 7. Figure 4.5 montre les résultats d'application de la formule de Dupire aux données artificielles (gauche) et aux prix réels d'options sur l'indice S&P 500. Alors que sur les données simulées, la formule de Dupire permet de retrouver un surface de volatilité locale qui paraît cohérent, la performance pour les données réelles n'est pas satisfaisante pour plusieurs raisons :

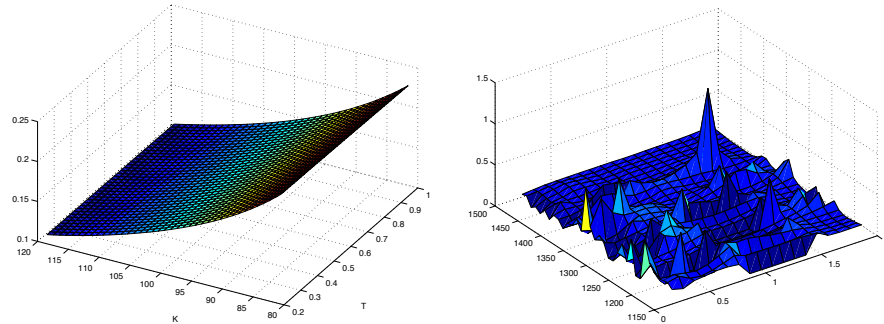


FIGURE 4.5 – Exemple de diffusion implicite. Gauche : données artificielles : la volatilité implicite est de la forme $I(K) = 0.15 \times \frac{100}{K}$ pour toutes maturités ($S_0 = 100$). Droite : données d'options sur S&P 500, interpolation par splines.

- Les prix de marché ne sont pas connus pour tous les strikes et toutes les maturités. Ils doivent donc être interpolés et le résultat final sera très sensible à la méthode d'interpolation utilisée.
- Du fait de la nécessité de calculer la deuxième dérivée de la fonction de prix d'option $C(T, K)$, les petites erreurs de données conduisent à des très grands erreurs sur la solution (problème mal posé). On reviendra sur ce point dans la section 4.6.

Résumé des principaux points critiques du modèle de volatilité locale et de l'approche de Dupire

- La surface de volatilité locale obtenue par la formule de Dupire est très sensible à la méthode d'interpolation des données
- Le seul facteur de risque est le sous-jacent ; impossible de prendre en compte le risque de volatilité
- La surface de volatilité locale calibrée n'est pas stable au cours de temps
- La dynamique de volatilité préconisée par le modèle ne correspond pas à celle observée sur le marché
- Calibration ne peut pas être effectué de façon cohérente avec l'estimation historique (marché complet)

4.5 Volatilité implicite dans les modèles à volatilité locale

Lien entre volatilité locale et volatilité implicite La formule de Dupire (4.10) peut être réécrite en terme de volatilités implicites du marché, en observant que pour toute option on a

$$C(T, K) = C_{BS}(T, K, I(T, K)),$$

4.5. VOLATILITÉ IMPLICITE DANS LES MODÈLES À VOLATILITÉ LOCALE 67

où $C_{BS}(T, K, \sigma)$ dénote la formule Black-Scholes pour le prix d'une call de volatilité σ et $I(T, K)$ est la volatilité implicite observée pour maturité T et strike K . Il sera plus pratique d'exprimer les prix en terme de *log-moneyness* $x = \log(S/K) - rT$, avec $I(T, K) = \tilde{I}(T, x)$ et $\sigma(T, K) = \tilde{\sigma}(T, x)$ et volatilité implicite sans dimension $v(T, x) = \tilde{I}(T, x)\sqrt{T}$. On a alors

$$\frac{\partial C}{\partial T} + rK \frac{\partial C}{\partial K} = \frac{\partial \tilde{C}}{\partial T} = Sn(d_1) \frac{\partial v}{\partial T} \quad (4.14)$$

et

$$K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial x^2} - \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x} = Sn(d_1) \left\{ v''_{xx} - \frac{v}{4}(v'_x)^2 + \frac{1}{v} \left(1 - \frac{xv'_x}{v}\right)^2 \right\}, \quad (4.15)$$

ce qui donne finalement la formule de Dupire en terme de volatilités implicites

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^2(T, x) &= \frac{2vv'_T}{vv''_{xx} - \frac{v^2}{4}(v'_x)^2 + \left(1 - \frac{xv'_x}{v}\right)^2} \\ &= \frac{2\tilde{I}T\tilde{I}'_T + \tilde{I}^2}{\tilde{I}T\tilde{I}''_{xx} - \frac{\tilde{I}^2T^2}{4}(\tilde{I}'_x)^2 + \left(1 - \frac{x\tilde{I}'_x}{\tilde{I}}\right)^2}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Pour tirer quelques conclusions de cette formulation, dans un premier temps supposons que la volatilité implicite ne dépend pas de strike (absence de smile). Dans ce cas la volatilité locale ne dépend pas non plus de strike et la formule (4.16) se réduit à

$$\sigma^2(T) = I^2(T) + 2I(T)T \frac{\partial I}{\partial T},$$

d'où

$$I^2(T) = \frac{\int_0^T \sigma^2(s) ds}{T},$$

la volatilité implicite est donc égale à la moyenne quadratique de la volatilité locale sur la durée de vie de l'option.

En supposant que I et ses dérivées restent finis lorsque $T \rightarrow 0$, dans cette limite, l'équation (4.16) devient

$$\tilde{I}^2(0, x) = \tilde{\sigma}^2(0, x) \left(1 - \frac{x}{\tilde{I}} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial x}\right)^2.$$

Cette équation différentielle se résout explicitement :

$$\tilde{I}(0, x) = \left\{ \int_0^1 \frac{dy}{\tilde{\sigma}(0, xy)} \right\}^{-1}. \quad (4.17)$$

Nous avons donc démontré que, *dans la limite de très courte maturité, la volatilité implicite est égale à la moyenne harmonique des volatilités locales*, un résultat établi par Berestycki et Busca [1]. Lorsque la volatilité locale $\sigma(0, x)$ est différentiable en $x = 0$, équation (4.17) permet de démontrer que (le calcul est laissé au lecteur)

$$\frac{\partial \tilde{I}(0, 0)}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{\sigma}(0, 0)}{\partial x},$$

la pente à la monnaie de la volatilité locale est égale, pour les courtes maturités, à 2 fois la pente à la monnaie de la volatilité implicite.

4.6 Calibration de la volatilité locale

L'équation de Dupire (4.11) définit l'opérateur de pricing $\sigma(*, *) \mapsto C(*, *)$, qui à une fonction de volatilité locale donnée associe l'ensemble des prix de calls pour tous les strikes et toutes les maturités. Inversement, si on observe tous les prix d'options pour tous les strikes et maturités, on peut reconstruire, grâce à la formule de Dupire (4.10). En pratique, on ne dispose que d'un nombre fini de strikes et maturités, et l'opération inverse qui consiste à reconstruire $\sigma(t, S)$ pour tout t, S à partir d'un nombre fini de prix $C_M(T_i, K_i), i = 1 \dots N$, devient un problème mal posé (cf. exemple 7). Pour résoudre cette difficulté, on peut utiliser l'interpolation de la volatilité implicite par une forme paramétrique ou semiparamétrique. Les méthodes d'interpolation complètement nonparamétriques (comme les splines) ont en général une performance assez médiocre pour ce type de problèmes.

4.6.1 Interpolation de la volatilité implicite

La paramétrisation suivante pour la volatilité implicite en fonction du paramètre de log-strike $k = \log \frac{K}{S} - rT$ a été proposée par Jim Gatheral [8] (voir également [14]), sous le nom de SVI (stochastic volatility inspired) : pour une échéance donnée, la variance implicite totale sans dimension $V(T, k) = I^2(T, k)T$ vérifie

$$V(k) = a + b\{\rho(k - m) + \sqrt{(k - m)^2 + \sigma^2}\}$$

avec $a \geq 0, b \geq 0, \sigma \geq 0, \rho \in [-1, 1]$ et $m \in \mathbb{R}$. Ici,

- a contrôle le niveau global du smile ;
- b contrôle la pente des ailes ;
- ρ contrôle l'asymétrie, "rotation" du smile ;
- m correspond à une translation ;
- σ contrôle la convexité à la monnaie.

La forme paramétrique SVI doit être calibrée séparément pour chaque échéance disponible. Ensuite, on peut définir la volatilité implicite aux dates intermédiaires par interpolation. Une fois l'interpolation trouvée pour chaque k et T , la volatilité locale peut être calculée par la formule de Dupire, qui s'écrit en termes de

V :

$$\sigma(T, k) = \frac{\frac{\partial V(T, k)}{\partial T}}{\left(1 - \frac{k}{2V} \frac{\partial V}{\partial k}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial k^2} - \frac{1}{4V} \left(\frac{\partial V}{\partial k}\right)^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{\partial V}{\partial k}\right)^2}. \quad (4.18)$$

Conditions d'absence d'arbitrage La paramétrisation SVI peut a priori conduire à des opportunités d'arbitrage statiques, telles que les prix d'options non convexes en fonction du strike. Pour assurer l'absence d'opportunités d'arbitrage, il faut que le numérateur et le dénominateur dans (4.18) soient positifs pour tout T et k , et de plus la condition additionnelle $\lim_{k \rightarrow +\infty} d_1(k) = -\infty$, qui assure la convergence des calls vers 0 pour grandes valeurs de strike, soit respectée [9].

La positivité du numérateur dans (4.18) : $\frac{\partial V(T, k)}{\partial T} \geq 0$ pour tout k et T , correspond à l'absence d'arbitrage intertemporel de type "calendar spread". Autrement dit, l'arbitrage de type "calendar spread" est absent si et seulement si les courbes de variance implicite en fonction du strike pour différentes maturités ne se croisent pas. La positivité du dénominateur

$$d(T, k) = \left(1 - \frac{k}{2V} \frac{\partial V}{\partial k}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial k^2} - \left(\frac{1}{4V} + \frac{1}{16}\right) \left(\frac{\partial V}{\partial k}\right)^2 \geq 0, \quad \forall k.$$

correspond à l'absence d'arbitrages de type "butterfly" (convexité des prix d'options).

Paramétrisation arbitrage-free de Gatheral et Jacquier Gatheral et Jacquier [9] proposent la paramétrisation suivante pour toute la nappe de volatilité implicite :

$$V(t, k) = \frac{\theta_t}{2} \left\{ 1 + \rho \phi(\theta_t) k + \sqrt{(\phi(\theta_t) k + \rho)^2 + 1 - \rho^2} \right\}. \quad (4.19)$$

Ici, $\theta_t = V(t, 0)$ est la variance implicite totale à la monnaie, déduite directement de la nappe du marché. Le paramètre ρ contrôle l'asymétrie du smile ; pour $\rho = 0$, le smile est symétrique à toute date. Le skew et la convexité ATM sont donnés par

$$\frac{\partial I(t, k)}{\partial k} \Big|_{k=0} = \frac{\rho \sqrt{\theta_t}}{2\sqrt{t}} \phi(\theta_t), \quad \frac{\partial^2 I(t, k)}{\partial k^2} \Big|_{k=0} = \frac{(1 - 2\rho^2) \sqrt{\theta_t}}{4\sqrt{T}} \phi^2(\theta_t).$$

On peut montrer que la forme paramétrique (4.19) n'admet pas d'opportunité d'arbitrage si les conditions suffisantes suivantes sont respectées :

- La fonction θ_t est croissante en t ;
- La fonction ϕ vérifie les relations suivantes, pour tout $\theta > 0$:

$$0 \leq \frac{\partial(\theta\phi(\theta))}{\partial\theta} \leq \frac{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}{\rho^2} \phi(\theta),$$

$$\theta\phi(\theta) < \frac{4}{1 + |\rho|}, \quad \theta\phi^2(\theta) \leq \frac{4}{1 + |\rho|}.$$

Par exemple, la fonction

$$\phi(\theta) = \frac{\eta}{\theta^\gamma(1+\theta)^{1-\gamma}}$$

vérifie les contraintes d'arbitrage pour $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ et $\eta \leq \frac{2}{\sqrt{1+|\rho|}}$.

Bibliographie

- [1] H. BERESTYCKI, J. BUSCA, AND I. FLORENT, *Asymptotics and calibration of local volatility models*, Quant. Finance, 2 (2002), pp. 61–69.
- [2] P. CARR, K. ELLIS, AND V. GUPTA, *Static hedging of exotic options*, Journal of finance, 53 (1998), pp. 1165–1190.
- [3] P. CARR AND D. MADAN, *Towards a theory of volatility trading*, in Volatility, R. Jarrow, ed., Risk Publications, 1998.
- [4] M. CHESNEY, M. JEANBLANC, AND M. YOR, *Mathematical Methods for Financial Markets*, Springer, London, 2009.
- [5] J. C. COX, *The constant elasticity of variance option pricing model*, Journal of Portfolio Management, 22 (1996), pp. 15–17.
- [6] B. DUPIRE, *Pricing with a smile*, RISK, 7 (1994), pp. 18–20.
- [7] N. EL KAROUI, *Couverture des risques dans les marchés financiers*. Lecture notes for master 'Probability and Finance', Paris VI university.
- [8] J. GATHERAL, *A parsimonious arbitrage-free implied volatility parameterization with application to the valuation of volatility derivatives*. Presentation at the 2004 Global Derivatives conference, available from http://www.math.nyu.edu/fellows_fin_math/gatheral/gatheral.htm, 2004.
- [9] J. GATHERAL AND A. JACQUIER, *Arbitrage-free svi volatility surfaces*. Preprint SSRN, 2012.
- [10] P. S. HAGAN AND D. E. WOODWARD, *Equivalent black volatilities*, Applied Mathematical Finance, 6 (1999), pp. 147–157.
- [11] H. J. KUSHNER AND P. DUPUIS, *Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time*, Springer, 2001.
- [12] P. PROTTER, *Stochastic integration and differential equations*, Springer, Berlin, 1990.
- [13] M. RUBINSTEIN, *Implied binomial trees*, Journal of Finance, 49 (1994), pp. 771–819.
- [14] ZELIADE, *Quasi-explicit calibration of Gatheral's SVI model*. Available from www.zeliade.com.