PROBABILITÉS ET DÉNOMBREMENT

Exercice 1 (Anniversaires). Soit une classe de 40 élèves dont on suppose les anniversaires indépendants et uniformément distribués sur l'année. Quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves de la classe aient leur anniversaire le même jour ?

Exercice 2 (Anagrammes). Combien peut-on former de mots distincts en réarrangeant les lettres de ABRACADABRA ? On ne tiendra pas compte du fait que le mot puisse être prononcé ou non !

Exercice 3 (Poker). Le poker se joue avec $4 \times 13 = 52$ cartes, chacune étant la donnée d'une couleur (pique, trèfle, cœur ou carreau) et d'une valeur (as, roi, reine, valet, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3 ou 2). Une main est un sous-ensemble constitué de 5 de ces 52 cartes. On tire une main au hasard, uniformément. Quelle est la probabilité d'obtenir les mains suivantes :

1. Quinte flush : 5 cartes de la même couleur et dont les valeurs sont consécutives.
2. Carré : 4 cartes de même valeur.
3. Full : 3 cartes de même valeur et 2 cartes d'une même autre valeur.
4. Couleur : 5 cartes de la même couleur, mais ne formant pas une quinte flush.
5. Suite : 5 cartes de valeurs consécutives, mais ne formant pas une quinte flush.
6. Brelan : 3 cartes d'une même valeur, sans tomber dans l'un des cas précédents.
7. Double-paire : deux cartes d'une même valeur et deux cartes d'une même autre valeur, sans tomber dans l'un des cas précédents.
8. Paire : deux cartes de même valeur, sans tomber dans l'un des cas précédents.

Exercice 4 (Binôme de Newton).

1. Démontrer la formule du triangle de Pascal : pour $n, k \in \mathbb{N}$,
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$
2. Démontrer la formule du binôme de Newton : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$:
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$
3. Application 1 : retrouver le nombre de parties d'un ensemble à n éléments.
4. Application 2 : montrer que si $n \geq 1$, il y autant de parties de taille paire que de taille impaire. Exhiber une bijection naturelle entre ces deux ensembles.
5. Application 3 : calculer les sommes suivantes :
$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}, \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} k^3 \binom{n}{k}.$$

Exercice 5 (Pile ou face). Une pièce équilibrée est lancée de manière répétée. Quelle est la probabilité qu'au n-ème lancer :

1. *face* apparaît pour la première fois ?
2. les nombres de *face* et *pile* obtenus sont égaux ?
3. exactement k *face* sont obtenus ?

Exercice 6 (Urne). Une urne contient n boules noires et r boules rouges. On les tire sans remise.

1. Quelle est la probabilité que la dernière boule tirée soit rouge ?
2. Calculer la probabilité que la première boule noire soit obtenue au k-ième tirage.
3. En déduire la formule
$$\binom{n+r}{n} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{n+r-1}{n-1}.$$
4. Calculer la probabilité que la boule obtenue juste après la première boule noire soit rouge.

Exercice 7 (Tirages ordonnés). On tire successivement sans remise r objets parmi n objets numérotés de 1 à n ($r \leq n$). Quelle est la probabilité d'obtenir une suite croissante de numéros ?

Exercice 8 (Parties aléatoires). Soit E un ensemble à n éléments, et soient A et B deux parties aléatoires de E, chacune étant choisie uniformément parmi toutes les parties de E, indépendamment de l'autre. Quelle est la probabilité pour que

1. $A \cap B = \emptyset$?
2. $A \cup B = E$?
3. A et B forment une partition de E ?
4. $\mathrm{card(A)} = \mathrm{card(B)}$?

Exercice 9 (Formule du crible de Poincaré). Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \geq 2$ des évenements quelconques. Démontrer par récurrence la formule du crible de Poincaré :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_i \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

Exercice 10 (Courriers). Une personne écrit n lettres destinées à n correspondants différents. Elle écrit les adresses au hasard sur les enveloppes une fois celles-ci fermées.

1. Calculer la probabilité qu'aucun correspondant ne reçoive la lettre qui lui était destinée.
2. Calculer la probabilité que k lettres exactement parviennent à leurs destinataires. Quelle est la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini ?